<u>1. Einführung in die Kinematik der Wasserwellen-bewegung:</u>

Wirkungen infolge der *natürlich* vorhandenen *Umweltbedingungen* (auch der durch anthropogene Einflüsse veränderten) können als *Umweltlasten* (environmental loads) bezeichnet werden. Die *Formulierung* solcher aus <u>*dynamischen*</u> Prozessen resultierenden Lasten stellt eine der Hauptaufgaben des Küstenwasserbaues und des Seebaues dar. (Gegensatz zum *Konstruktiven Ingenieurbau).*

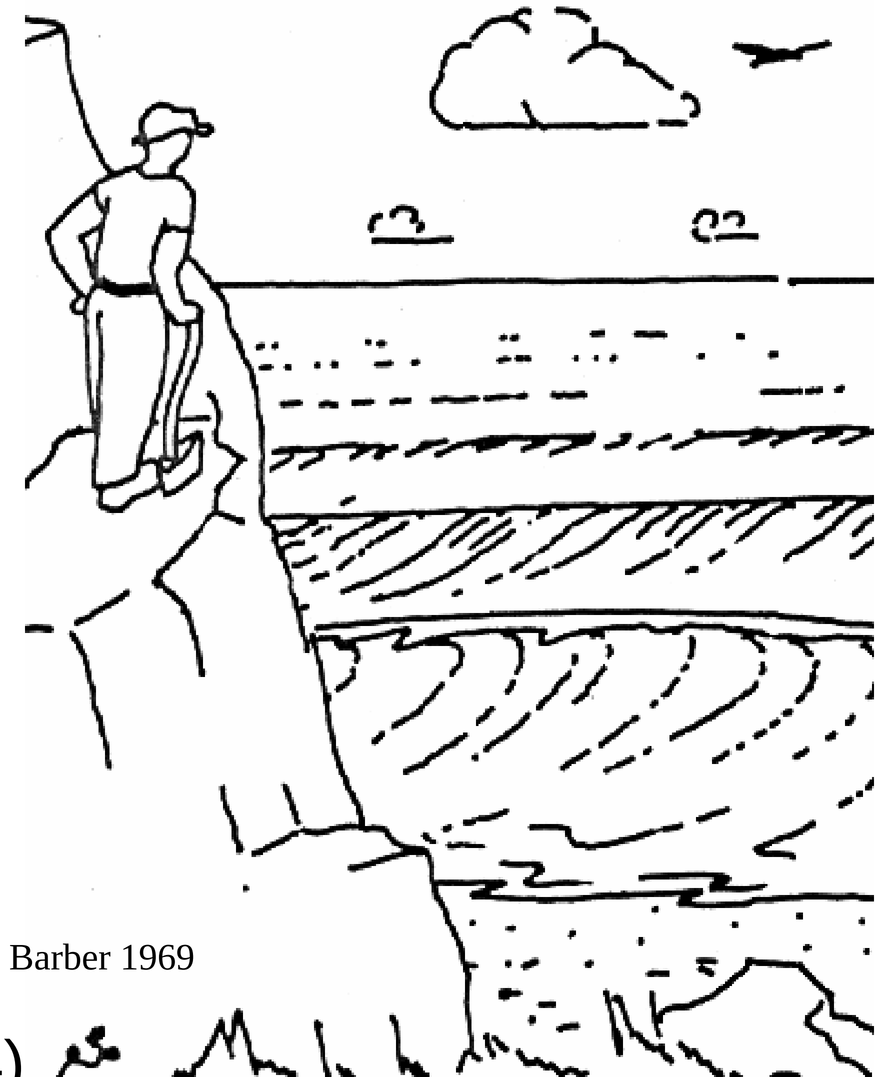
Für Küsten- und Seebaukonstruktionen sind von besonderer Bedeutung

- Hohe Wasserstände
- Windwirkungen
- Wellenwirkungen
- Strömungen

<u>Aufgaben:</u> Bemessung von Küstenschutz-, See- und Hafenbauwerken; hydrologische Untersuchungen insbes. bezüglich Erosion, Sedimentation, Entnahme und Einleitung.

Hohe *Wasserstände*,
hohe *Windgeschwindigkeiten*,
hohe (und steile) *Wellen* und
starke *Strömungen*
treten an Küstenstandorten
gemeinsam auf.
Oft besteht eine Aufgabe darin,
deren Einzelwirkungen
hinsichtlich aufgetretener
Schäden zu beurteilen.

Die relativen dynamischen Wirkungen von *Wind* und *Wellen* sind *grundsätzlich* gekennzeichnet durch die *stark unterschiedlichen Dichten* ρ *von Luft und Wasser* (Staudruckkräfte verhalten sich wie 1 : 800, vergl. DIN V ENV 1992-2-4).



Barber 1969

Zum Phänomen Wasserwelle:

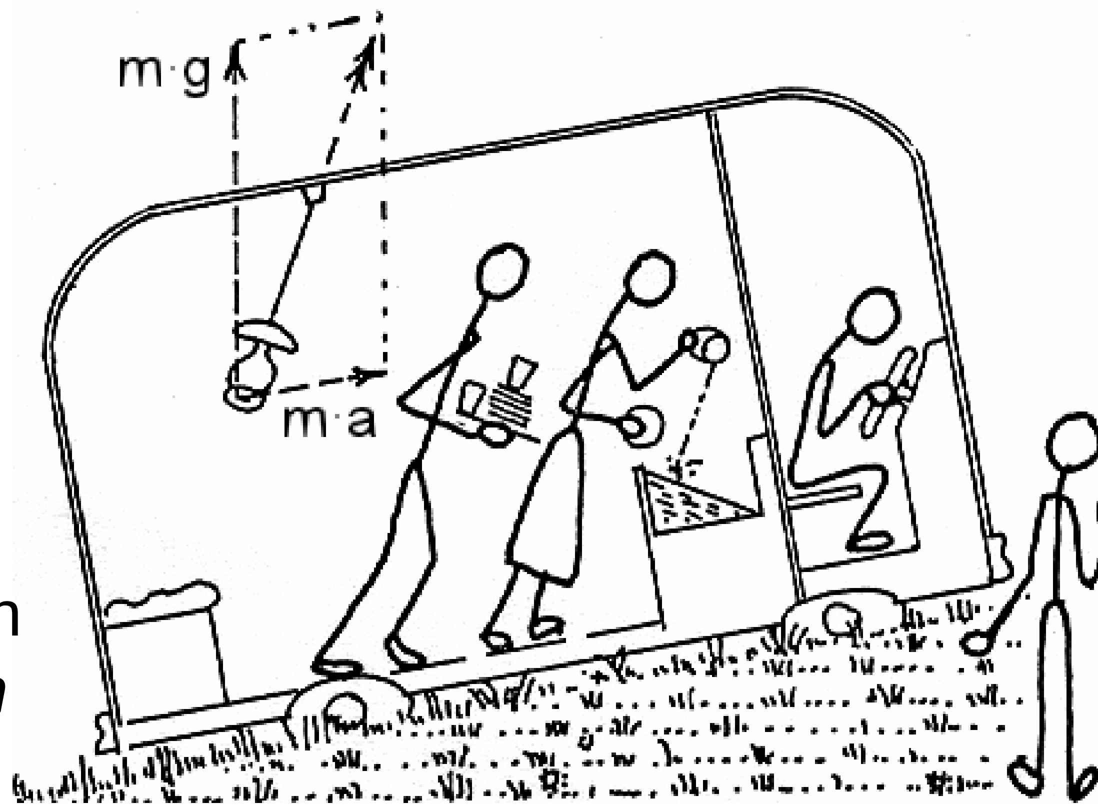
Im Idealfall die Fortbewegung einer regelmäßigen “Form”, durch die die Fähigkeit *transportiert* wird, *schwingungsfähige* Gebilde, die von ihr erreicht werden, zu Schwingungen anzuregen. *Schwerewellen* bleiben über längere Zeit bzw. über eine längere Laufstrecke erhalten. Sie können sich in ihrer Charakteristik je nach vorhanden Randbedingungen aber auch *ändern*. Erzeugt durch die Energie des Windes stellt die Welle selbst *Energie* dar, die Wasserteilchen in Bewegung setzt.

Das markante geometrische Merkmal einer Wasserwelle ist der je nach Wellenphase gegenüber der Horizontalen *unterschiedlich geneigte Wasserspiegel.*

Im Normalfall sind Wellen Erscheinungen, die unerwünscht sind, insbesondere weil sie an Bauwerken die höchsten Horizontallasten erzeugen, auf die Bauwerke auf der Erde überhaupt bemessen werden → Offshorebauwerke. Diese zählen mit Höhen z. Z. bis zu 500m zugleich auch zu den höchsten Bauwerken.

Unter welchen Umständen tritt ein gegen die Horizontale geneigter Flüssigkeitsspiegel auf ?

Neben der Erdbeschleunigung g ist eine weitere Beschleunigung a wirksam. Der Wasserspiegel stellt sich *senkrecht zur resultierenden* Beschleunigung ein.

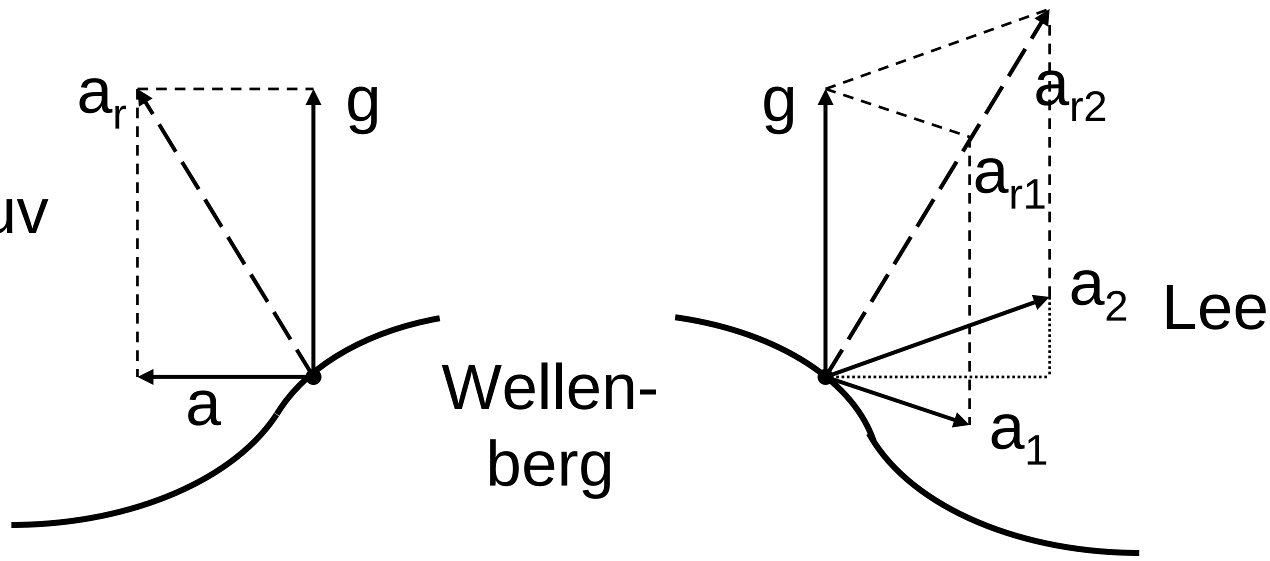


Barber 1969

Beispiel eines auf einer Steigung anfahrenden Autos:

Die im unbeschleunigten Zustand senkrecht hängende Lampe wird infolge Anfahrbeschleunigung a seitlich ausgelenkt. Das Lampenkabel muss die aus m· g und m· a resultierende Kraft aufnehmen.

$\longrightarrow$ c = Wellenfortschrittsgeschwindigkeit



Bei Wasserwellen muss diese *zusätzliche Beschleunigung* a [m²/s] <u>in den dargestellten Wellenphasen</u> zumindest *auch* eine *horizontale* Komponente haben. Eine (kleinere) vertikale Komponente kann nach unten oder nach oben gerichtet sein. Insgesamt muss aber die zusätzliche Beschleunigung jeweils in Richtung der Wellenphase des niedrigsten Wasserspiegels (Richtung Wellental) weisen. Indessen fordert der *Wechsel* zwischen Wellental und Wellenberg (horizontaler Wasserspiegel) eine zusätzliche *vertikale* Beschleunigung a.

Tatsächlich ist die zusätzlich zur Erdbeschleunigung g wirksame Beschleunigung bei Wasserwellen (Schwerewellen) die Zentrifugalbeschleunigung

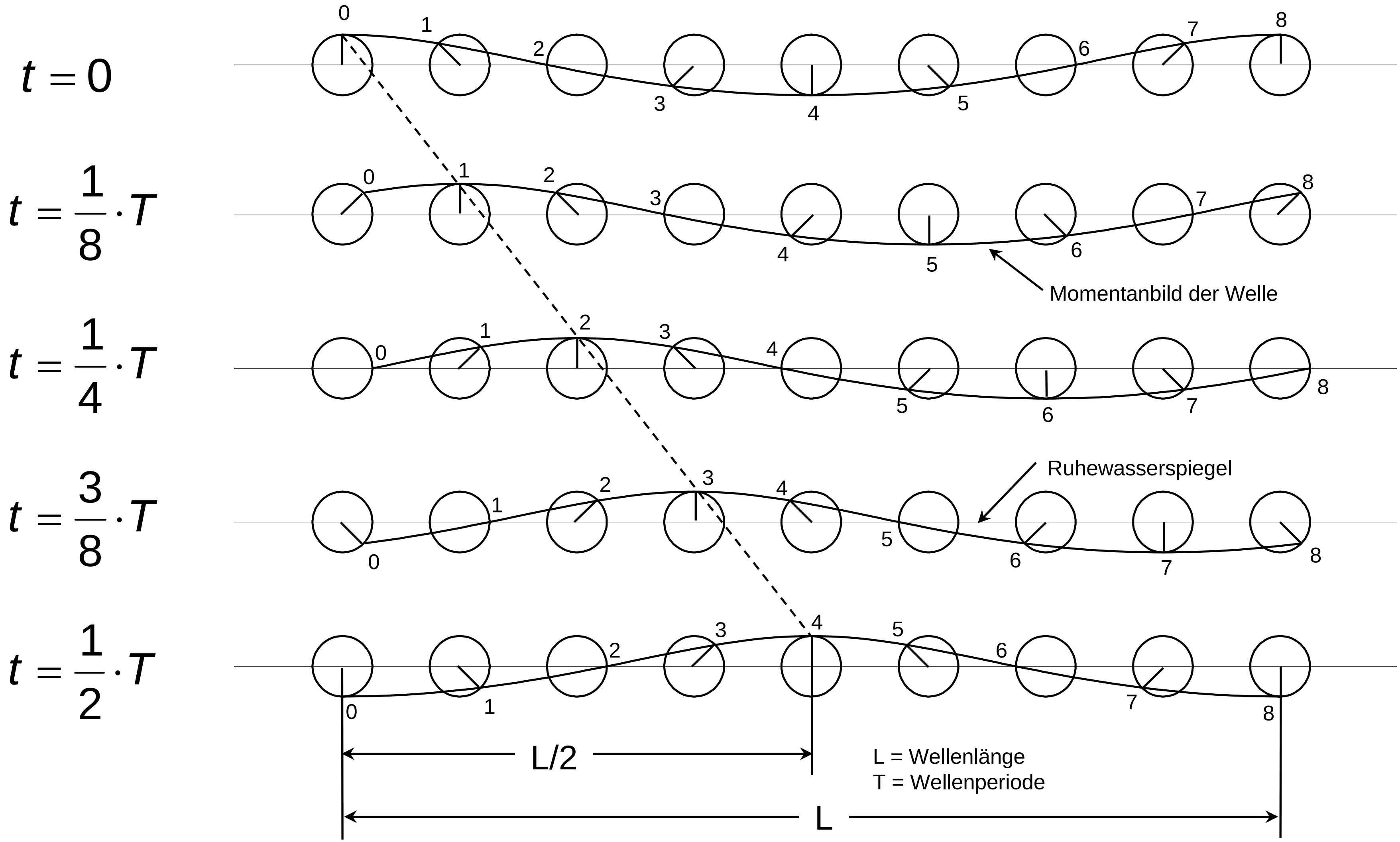
$$\boxed{a = \frac{w^2}{r}}$$

Darin ist w = Umfangsgeschwindigkeit auf dem sogenannten *Orbitalkreis* und r = Radius des Orbitalkreises.
Mit r = H/2 (= halbe Wellenhöhe) und T = konstante Periode der Drehbewegung wird

$$\boxed{w = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{\pi \cdot H}{T}} \qquad (13)$$

Beim Passieren einer Welle werden die Wasserteilchen im Idealfall (über großer Wassertiefe) auf *Kreisbahnen* (Orbitalbahnen) bewegt, die etwa am Ort bleiben.
Dies ist zu beobachten bei einem an der wellenbewegten Flüssigkeitsoberfläche schwimmenden Körper (z.B. Korken).

Orbitalbewegung schematisch



Zur Wellenfortschrittsgeschwindigkeit c (im Tiefwasser):

Nach der Definition der Orbitalgeschwindigkeit

$$\boxed{w = (2\pi \cdot r)/T = \pi \cdot H/T} \qquad (13)$$

ist T (= Periode) die Umlaufzeit, die dem Vorrücken der Welle um eine volle Wellenlänge L entspricht. Dementsprechend ist die Wellenfortschrittsgeschwindigkeit

$$\boxed{c = \frac{L}{T}} \qquad (02)$$

Wird ein mit der Wellenfortschrittsgeschwindigkeit c (nach rechts) fortschreitender Beobachter vorausgesetzt, ist für diesen die Welle als Ganzes in Ruhe; ihr Umriss erscheint ihm erstarrt.
Es bewegen sich aber jetzt die einzelnen Flüssigkeitsteilchen auf ihren (am Ort bleibenden) Orbitalbahnen mit großer Geschwindigkeit (nach links) an ihm vorüber. Der Beobachter erhält für ein Wasserteilchen im Wellental eine Geschwindigkeit $u_1 = c + w$

und am Wellenkamm $u_2 = c - w$

Werden die kinetischen Energien am Wellental und am Wellenberg verglichen, so ist die Differenz

$$\frac{m}{2}\left(u_1^2 - u_2^2\right) = \frac{m}{2} \cdot \left[c^2 + 2cw + w^2 - c^2 + 2cw - w^2\right]$$

$$\frac{m}{2}\left(u_1^2 - u_2^2\right) = \frac{m}{2} \cdot 4 \cdot c \cdot w = 2 \cdot m \cdot w \cdot c$$

Dieser für das Wasserteilchen im Wellental gefundene Gewinn an kinetischer Energie kann nur auf Kosten der potentiellen Energie erzielt sein (vergl. Pendelschwingung). Die Abnahme der potentiellen Energie beim Übergang vom Wellenberg zum Wellental beträgt: Gewichtskraft mal Hubhöhe, also

$$\mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \cdot 2 \cdot \mathrm{r} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{H} = 2 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{w} \cdot \mathrm{c}$$

$$c = \frac{g \cdot H}{2 \cdot w} \quad \text{bzw.} \quad w = \frac{g \cdot H}{2 \cdot c}$$

Demnach ergibt sich mit $w = \pi \cdot H / T$
die Wellenfortschrittsgeschwindigkeit auch zu

$$\boxed{c = \frac{gT}{2\pi}} \qquad (19)$$

2. Lineare Wellentheorie nach AIRY-LAPLACE

2. 1. Voraussetzungen
2. 2. Kinematik fortschreitender Wellen
(Trochoidenwellen)
2. 3. Parameter der Sinuswellen
2. 4. Orbitalbahnen, Orbitalgeschwindigkeiten
2. 5. Wellenfortschritt
2. 6. Dispersion
2. 6.1 Klassische Dispersionsrelation
2. 6.2 Formeln für Flachwasser
2. 6.3 Wellentransformation infolge überlagerter Strömungen
2. 7. Hydrodynamische Druckverteilung
2. 8. Wellenenergien
2. 9. Wellentransformation
2.10. Formelsammlung

Lineare Wellentheorie nach AIRY-LAPLACE

2. 1. Voraussetzungen:

A. Reguläre Wellen, d.h., Folgen von Wellen gleicher *Höhe*, *Periode, Länge* und Form. (Wirkliche Wellen sind meistens irregulär; Unregelmäßigkeiten können durch Überlagerung regulärer Wellen entstehen, vergl. *Wellenspektrum*).

B. Zweidimensionale Wellen, d.h., *keine* Änderungen der Wellenparameter senkrecht zur Ebene der (Sinus-)Wellenform.

C. Konstante Wassertiefe (Wassertiefe (depth) d = konst.)

D. Keine Reibungswirkungen (Ideale Flüssigkeit)

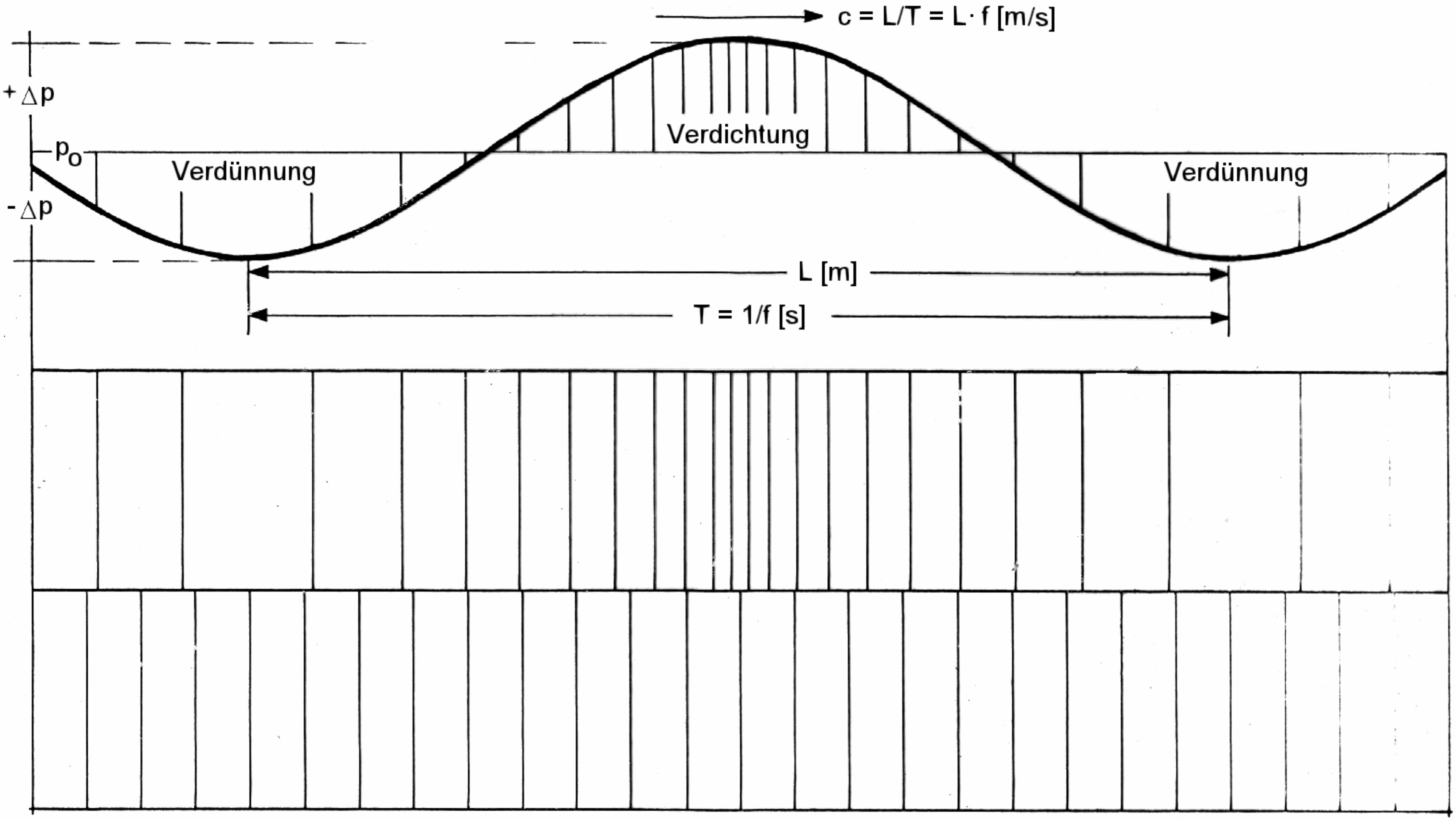
Längen in [m], Zeiten in [s].
Mit der Dichte des Wassers ρ in [t/m^3] ergibt sich die Krafteinheit in [kN]. $1kN = 1t \cdot m/s^2$.

<u>2. 2. Kinematik fortschreitender Oberflächenwellen (Trochoidenwellen)</u>

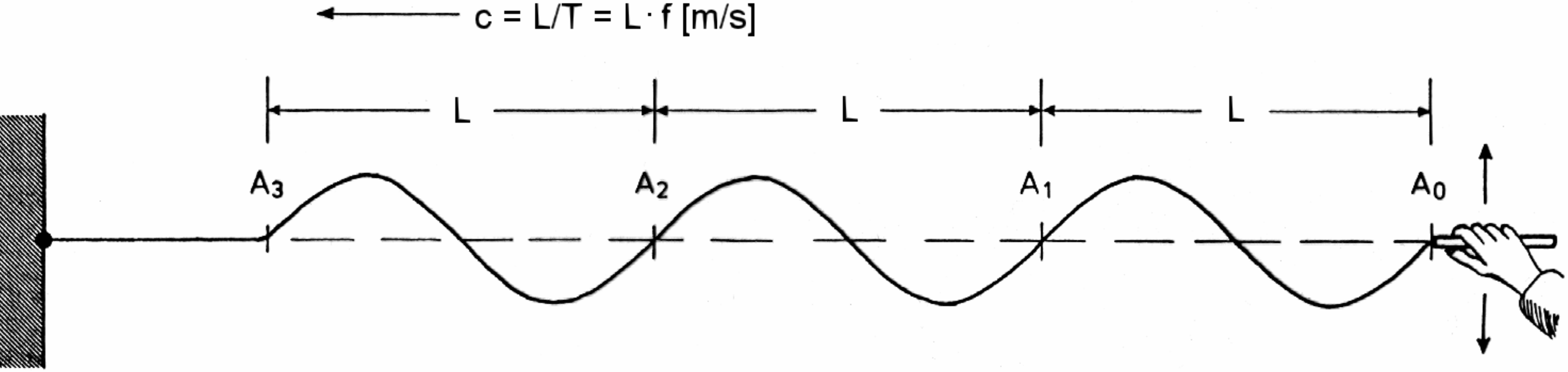
Fortschreitende Wellen an einer Flüssigkeits*oberfläche* pflanzen sich in Form einer Folge regulärer Wellen mit konstanter Wellenfortschrittsgeschwindigkeit c [m/s] in horizontaler Richtung fort.

Im Gegensatz zu den *Longitudinalschwingungen* mit Schwingbewegungen <u>nur in der Achse der Wellenfortschrittsrichtung</u> (Beispiel: Schallausbreitung) und
Transversalschwingungen mit Schwingbewegungen <u>nur senkrecht zur Wellenfortschrittsrichtung</u> (Beispiele: Seilschwingungen, elektromagnetische Wellenausbreitung)
stellen Wasserwellen (Oberflächenwellen) <u>*zugleich*</u> Longitudinal- und Transversalschwingungen dar.

Longitudinalwelle (Verdichtungswelle)



Transversalwelle (Seilwelle)



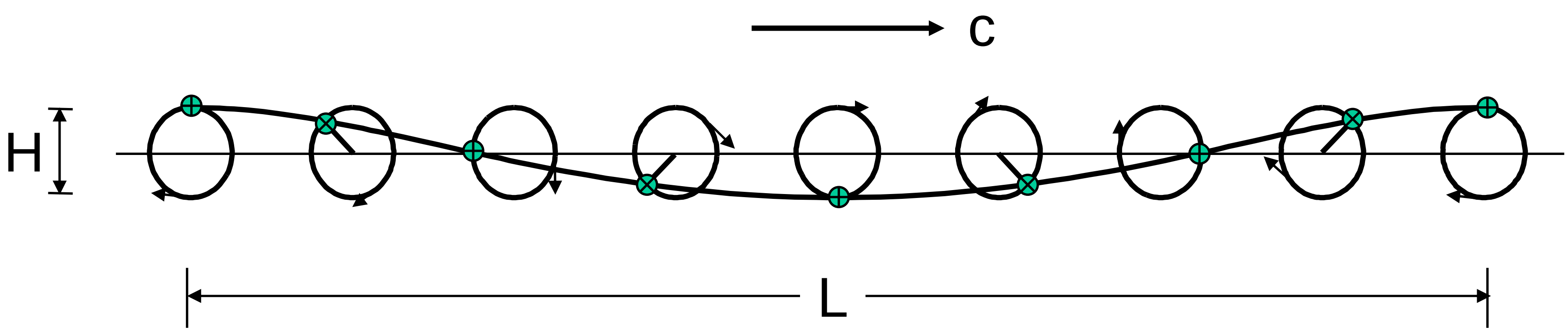
Nach Ausführung von drei vollständigen Schwingungen (Auf- und Abbewegungen) bei A_0 ist die Störungsfront bei A_3 angelangt. Zwischen A_0 und A_3 sind zu diesem Zeitpunkt drei vollständige Wellenformen gleicher Wellenlänge L vorhanden.

Zur Erzeugung einer vollständigen Wellenform wird jeweils die Zeit T (Wellenperiode) benötigt. Demnach ist die Wellenfortschrittsgeschwindigkeit c = L/T.

$$\boxed{c = \frac{L}{T}}$$ gilt für Wellen jeder Art !

Kinematisches Modell für Oberflächenwellen (Schwerewellen):

Ein kinematisches Modell, das gleichzeitig Schwingbewegungen parallel zur Wellenfortschrittsrichtung *und* senkrecht zur Wellenfortschrittsrichtung aufweist, wurde erstmals von GERSTNER 1804 entwickelt und stellt die Grundlage aller Wellentheorien dar.

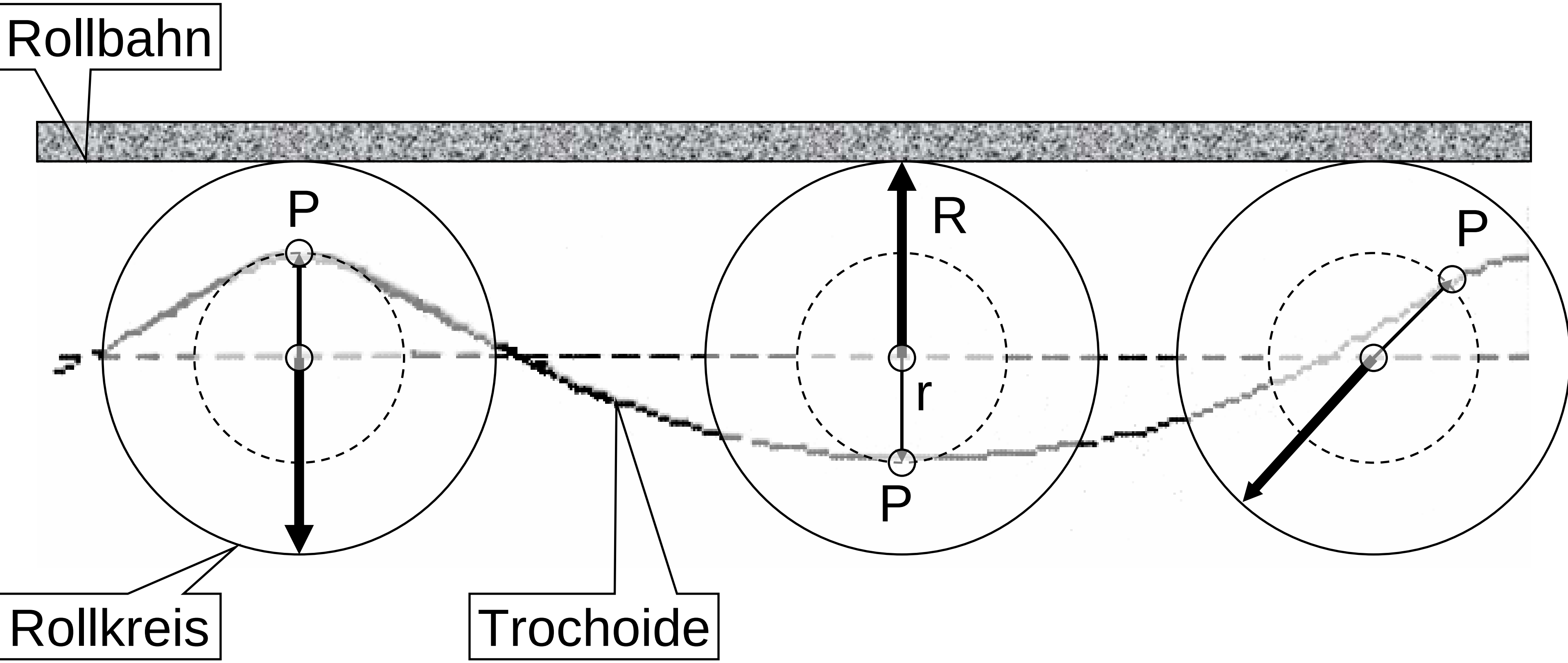


Für die Bewegung der Wasserteilchen an der Wasseroberfläche wird dabei angenommen, dass sie für die Dauer einer Wellenperiode T Kreisbahnen mit dem Durchmesser H (= Wellenhöhe) durchlaufen.

Ein solcher Bewegungsablauf ist kinematisch nur mit einer fort-schreitenden *trochoidalen* Wellenform vereinbar.

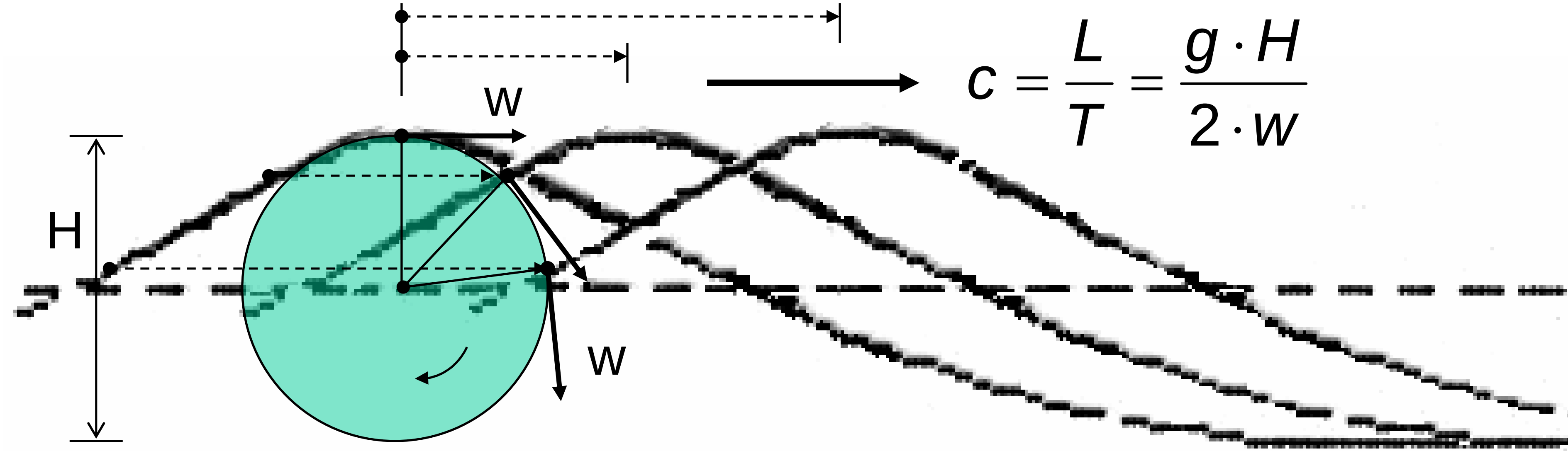
Vorbetrachtung:

Erzeugung einer *ortsfesten* Trochoide an einer ebenen Rollbahn:



Eine Trochoide (= verkürzte Zykloide) wird beim Abrollvorgang einer Kreisscheibe (Radius R) vom Punkt P (Zeigerradius r) beschrieben.

Eine *fortschreitende* trochoidale Wellenform wird im Gegensatz dazu dadurch erhalten, dass die „am Ort“ verbleibenden Orbitalbewegungen mit der Wellenfortschrittsgeschwindigkeit c gekoppelt sind, vergl. oben.

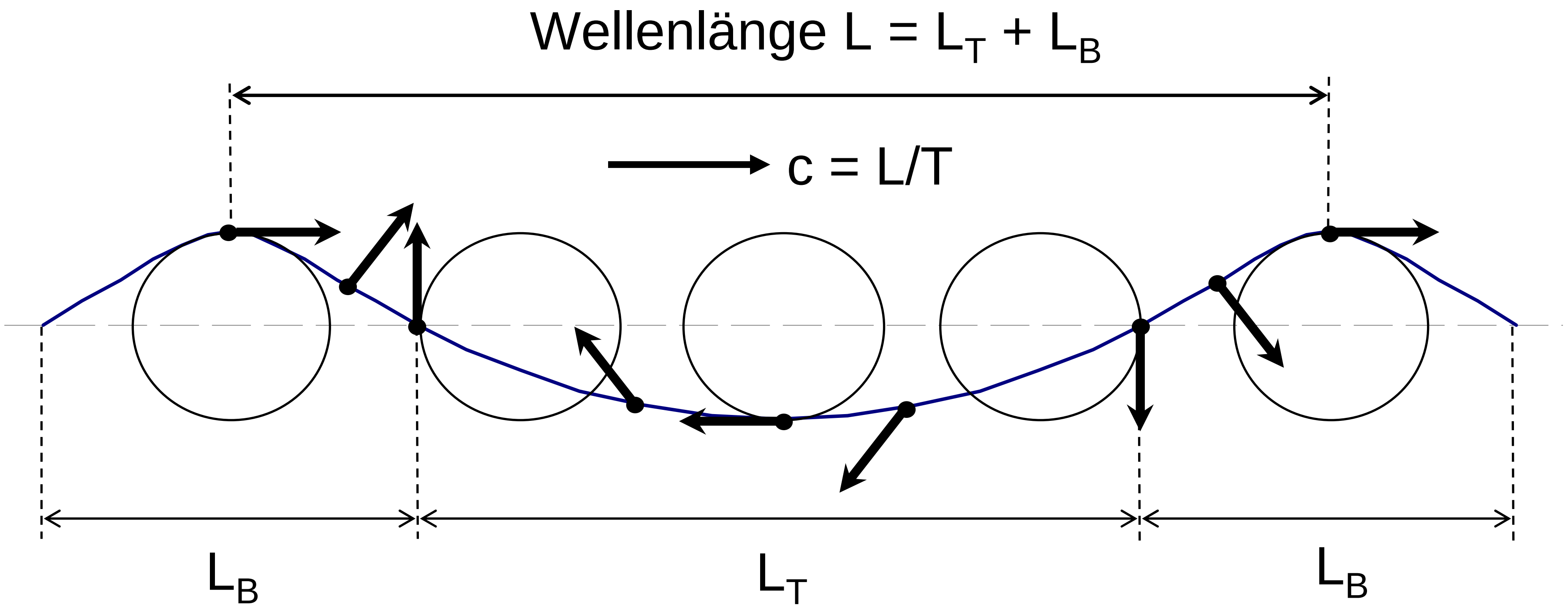


$$c = \frac{L}{T} = \frac{g \cdot H}{2 \cdot w}$$

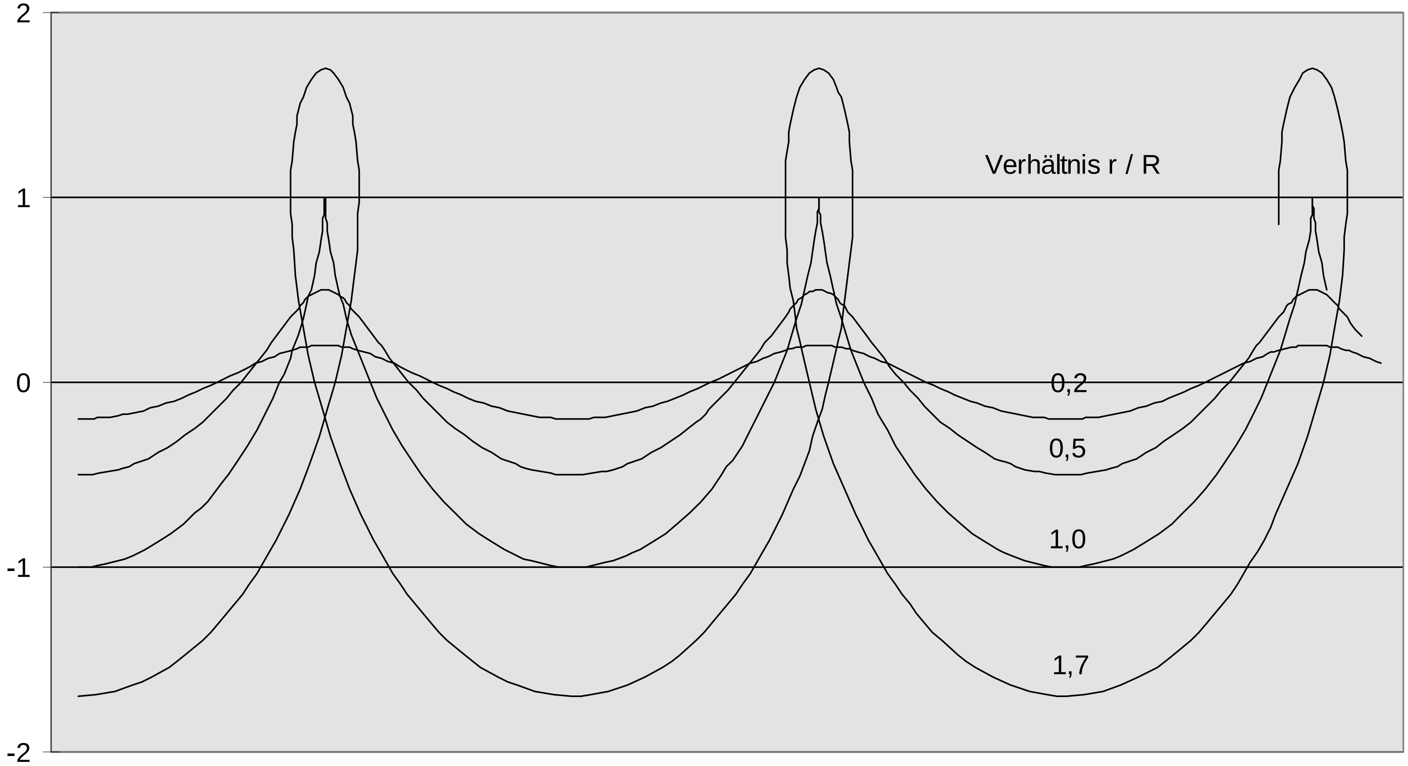
Einer vorgegebenen Orbitalbewegung entspricht demnach eine Trochoidenwelle mit bestimmter Länge L.

Stabile Wellen sind gekennzeichnet durch w < c.

Momentane Richtungen der Orbitalgeschwindigkeiten w bei quasistationärer Betrachtung: Beobachter folgt der Trochoiden-welle mit gleicher Fortschrittsgeschwindigkeit c = L/T.



Trochoidenwellen sind gekennzeichnet durch eine *Vertikale Wellenasymmetrie*: $L_T > L_B$

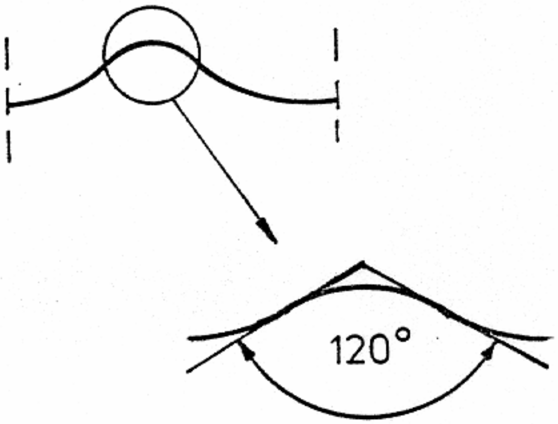


Theoretisch können je nach dem Verhältnis w/c bzw. r/R unterschiedliche Trochoidenformen gebildet werden.

Form A: V*erlängerte Zykloide* mit dem Zeigerradius r > Rollradius R. Diese ist als *Wellenform* physikalisch unmöglich.

Form B: Gemeine Zykloide mit r = R ist ebenfalls instabil.

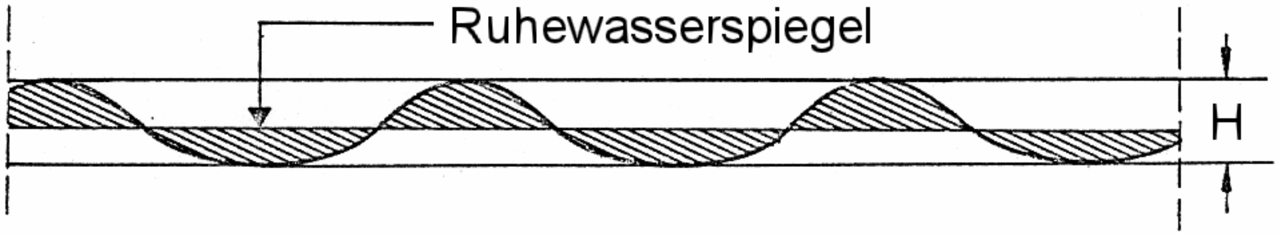
Kammwinkelbedingung nach STOKES:



Form C: Nur verkürzte Trochoiden mit $r/R < 1$ sind physikalisch mögliche Wellenformen, mit der weiteren Einschränkung dass der Kammwinkel $\alpha > 120^o$ ist. Bei kleinerem Kammwinkel werden Wasserwellen instabil und brechen:
Die Oberflächenspannung wird durch austretendes Wasser überwunden.

STOKES hat nachgewiesen, dass diese Begrenzung gleichbedeutend ist mit der Bedingung $w < c$, vergl. oben.

Ruhewasserspiegel:



Bei Wellenfolgen wird ein sog. Ruhewasserspiegel dadurch definiert, dass die Querschnittsfläche unter dem Wellenberg (über dem Ruhewasserspiegel) genau gleich derjenigen des Wellentales (unter dem Ruhewasserspiegel) ist.

Trochoidenwellen sind allgemein dadurch gekennzeichnet, dass der *Wellenberg kürzer und höher* ist (über dem Ruhewasserspiegel) als das Wellental (unter dem Ruhewasserspiegel).

Bei Wellen im Flachwasserbereich (*solitary waves*) kann die Höhe des Wellenberges bis zu 3/4 der gesamten Wellenhöhe H (Abstand Tal - Berg) ausmachen, während das Wellental H/4 unter dem Ruhewasserspiegel liegt.

Vergleich Trochoidenwelle - Cosinuswelle:

Tatsächlich kommt die *asymmetrische Gestalt* der Trochoiden-wellen und die damit verbundene Kinematik dem natürlichen Wellenvorgang bei *Tiefwasserbedingungen* bereits *sehr* nahe.

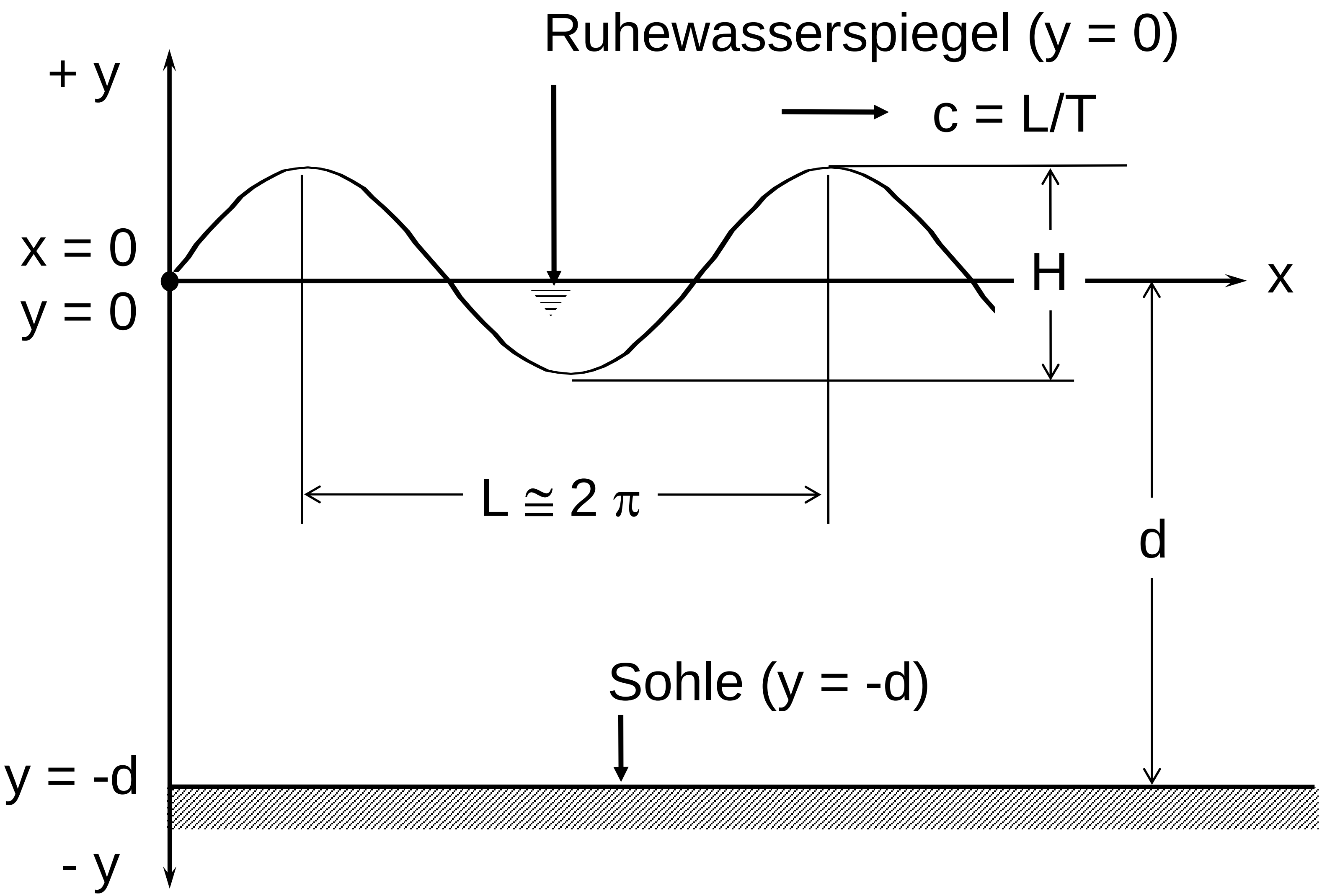
Ebenfalls von den Bahnlinien der Wasserteilchen ausgehend oder unter Verwendung des Geschwindigkeitspotentials sind aber zahl-reiche weitere Näherungslösungen (z. B. höherer Ordnung nach Stokes) entstanden mit dem Ziel sich dieser „Naturform“ weiter anzunähern. Bei praktischen Berechnungen, die sich oft auf Ge-biete beschränkter Wassertiefe beziehen, wird jedoch bevorzugt die sog. *Lineare Wellentheorie* mit einem *symmetrischen* Wellen-profil verwendet.

Unter der meist zutreffenden *Voraussetzung*, dass bei fortschreitenden Wasserwellen die Wellenhöhen im Vergleich zu den Wellenlängen gering sind (*kleine Wellensteilheit S = H/L*), kann die *Trochoidenform durch die Cosinusform* genähert werden. Damit sind die weiteren Vorteile der linearen Wellentheorie:

- Auf der Grundlage der Potentialtheorie und des Energiesatzes können für die instationäre Wellenströmung *geschlossene Lösungen* für die verschiedensten Wellenparameter angegeben werden wie Größe und Richtung der *Orbitalbewegungen* (Geschwindigkeiten und Beschleunigungen), *Wellenfortschrittsgeschwindigkeit*, *Druckverteilung* etc.
- Anwendbarkeit geschlossener mathematischer Lösungen der Wellenparameter *auch für den Bereich begrenzter Wassertiefe* *(Grundberührung)*, wo beispielsweise die Orbitalbewegung auf *elliptischen Bahnen* erfolgt.

  (Die reine Trochoidaltheorie ist hierfür nicht anwendbar !)

2.3 Geometrische Parameter von Sinuswellen



Für alle Wellenformen sind als *geometrische* Parameter definiert:

• Wellenhöhe	H [m]
• Wellenlänge	L [m]
• Wellensteilheit H/L	S [-]
• Wellenperiode	T [s]
• Wellenfrequenz 1/T	f [Hz = 1/s]
• Wellenfortschrittsgeschwindigkeit L/T	c [m/s]
• Wassertiefe	d [m]

In der linearen Wellentheorie nach AIRY-LAPLACE ist der räumliche und zeitliche Verlauf der

- Wasserspiegelauslenkung y = f(x,t) [m]

sinus- oder cosinusförmig.

<u>Wellenhöhe H:</u> Der vertikale Abstand von Wellental zu Wellenberg. Bei *irregulären* Wellen der Höhenunterschied zwischen dem *vorausgegangenen* Wellental und dem *nachfolgenden* Wellenberg.

<u>Wellenlänge L:</u> Der horizontale Abstand zweier Wellenberge oder -täler.
Bei *irregulären* Wellen allein der Abstand zweier Wellentäler.

<u>Wellensteilheit S:</u> Wichtige abgeleitete dimensionslose Kennzahl

$$\boxed{S = H/L} \qquad (01)$$

Sinuswellen: $1{:}50 \leq S = H/L \leq 1{:}10$
Dünungswellen: $S = H/L \leq 1{:}100$

<u>Wellenperiode T:</u> Zeitabstand der Aufeinanderfolge zweier Wellen-berge oder -täler, gemessen an einem Ort beim Durchgang einer Wellenfolge.
Bei irregulären Wellen nur der Zeitabstand zwei-er benachbarter Wellentäler.

<u>Wellenfrequenz f:</u> Der Kehrwert der Wellenperiode $\boxed{f = 1/T}$

Wellenfortschrittsgeschwindigkeit c:

Aus Wellenlänge L und Wellenperiode T abgeleitete Geschwindigkeit

$$\boxed{c = L/T} \qquad (02)$$

Bei irregulären Wellen:

$$\boxed{c = L \cdot f} \qquad (02a)$$

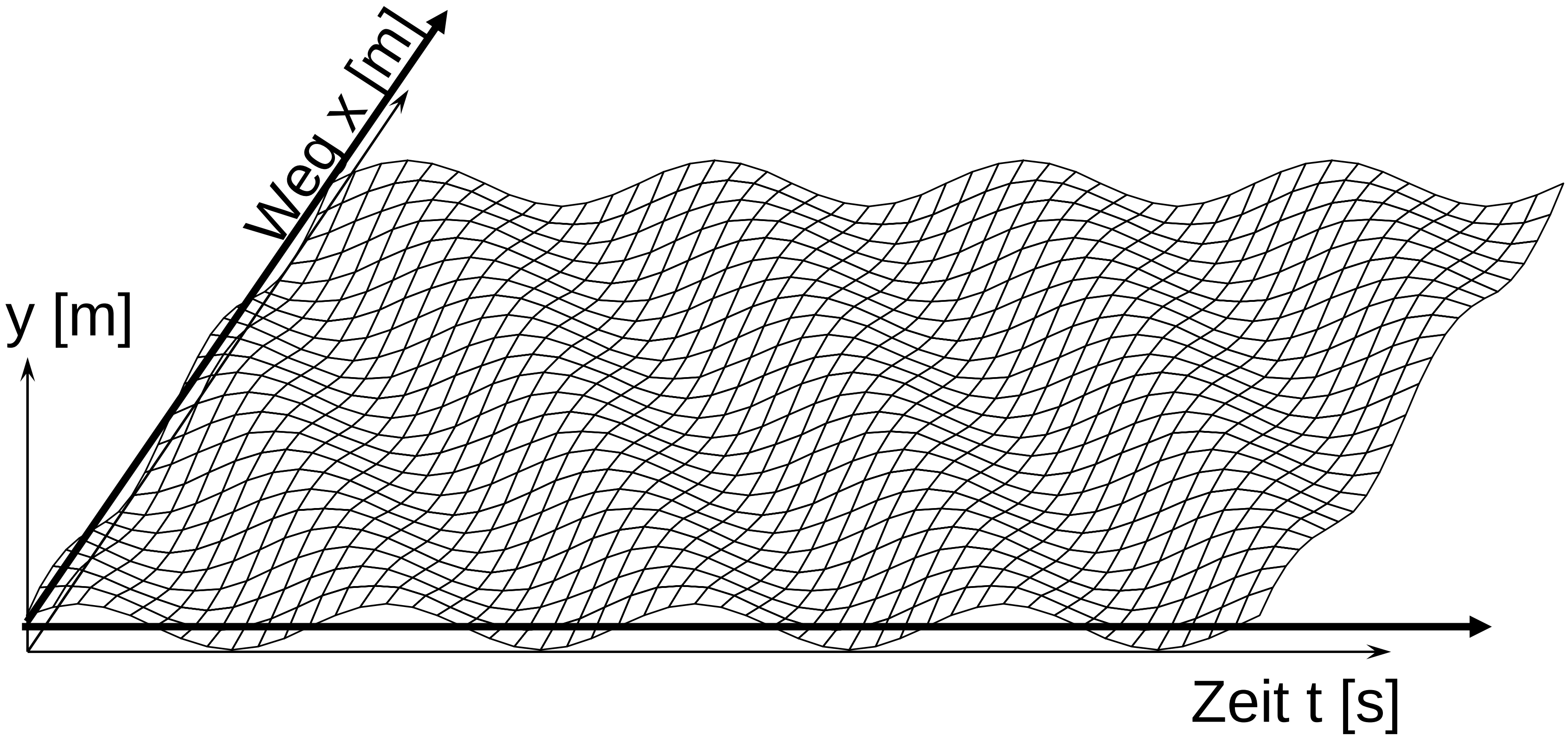
Die Wellenfortschrittsgeschwindigkeit c ist durch die Zeit T gegeben, in der die Welle ihre eigene Länge L zurücklegt.
Sie ist zu unterscheiden von der Orbitalgeschwindigkeit w der Wasserteilchen, vergl. dort.

Wassertiefe d: Vertikaler Abstand des Ruhewasserspiegels von der Sohle.

Wasserspiegelauslenkung y(x,t):

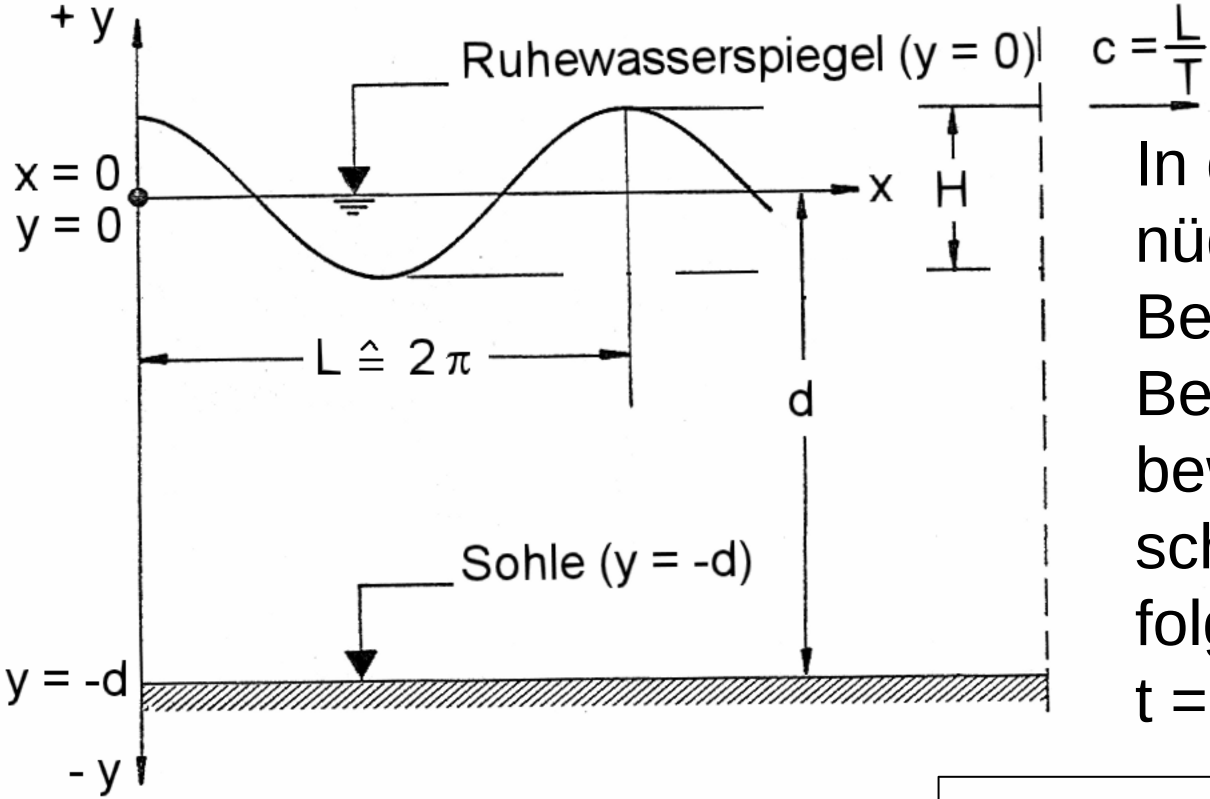
Die räumliche und zeitliche vertikale Auslenkung gegenüber dem Ruhewasserspiegel (y = 0).
Eine Funktion zweier periodisch Veränderlicher.

Oberflächenwelle (Wasserwelle): y (x,t)



$$\boxed{y = f(x,t) = \frac{H}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{H}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x - c \cdot t\right)} \quad (3)$$

(Sinus-Welle)



In den meisten Fällen genügt eine quasistationäre Betrachtung, bei der der Beobachter der Wellenbewegung mit Wellenfortschrittsgeschwindigkeit c folgt. Dann ist c = 0 (bzw. t = 0) zu setzen.

Cosinus-Welle:

$$\boxed{y = f(x) = \frac{H}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right)} \qquad (04)$$

(Entsprechend kann x = 0 gesetzt werden, wenn die Wellenentwicklung über der Zeit t beurteilt werden soll (T ~ 2π.)

Diskussion von $$y = f(x) = \frac{H}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right) \tag{04}$$

Der Wellenberg liegt y = H/2 über und das Wellental y = - H/2 unter dem Ruhewasserspiegel.

Ausgezeichnete Wellenphasen einer Cosinuswelle (L ~ 2π) :

Phase	x	y
Wellenberg	0	+H/2
Ruhewasserspiegel	L/4	0
Wellental	L/2	-H/2
Ruhewasserspiegel	3L/4	0
Wellenberg	L	+H/2

usw.; gilt für zeitliche Wellenphasen entsprechend (T ~ 2π).