Impulssatz

Wie der Energiesatz folgt auch der Impulssatz als intermediäres Integral aus der NEWTONschen Grundgleichung

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

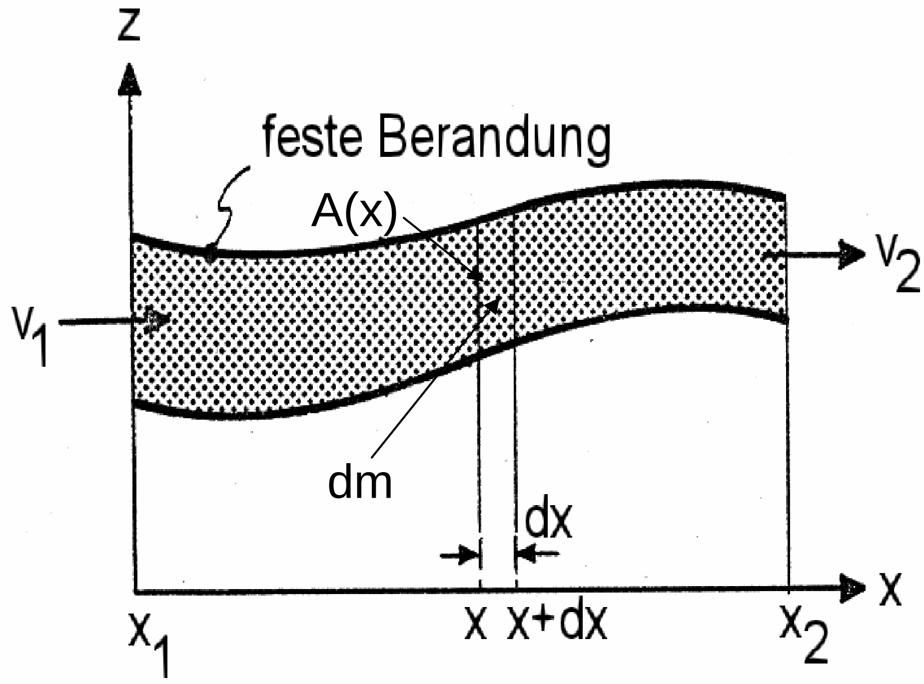
Von Bedeutung ist aber, dass bei den äußeren Kräften und Impulskräften der *vektorielle* Charakter erhalten bleibt. Die einzelnen Komponenten können getrennt betrachtet werden.

[Bevor Newton die o.a. Definition der Kraft gab, kannte er bereits den Impuls = Bewegungsgröße]

$$\boxed{\vec{I} = m \cdot \vec{v} \quad \text{in} \quad \frac{t \cdot m}{s}}$$

Die Kraft hat er zunächst als die zeitliche Änderung dieser Bewegungsgröße gefunden:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \vec{v}\right) \qquad \text{Mit} \quad \frac{dv}{dt} = a \quad \text{wird} \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad]$$



Es wird eine zweidimensionale Strömung vorausgesetzt.

Da sich die Betrachtung nur auf die *horizontale* Strömungskomponente beziehen soll, werden bei x_1 und x_2 zwei *vertikale* Kontrollschnitte gelegt, mit denen ein endlich großes Volumen abgegrenzt wird.

Darin wird wiederum das Masseteilchen dm entlang dx abgegrenzt. Dieses unterliegt dann der Beschleunigung a.

$$\sum \vec{F} = \int a \cdot dm$$ Darin sind $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A(x) \cdot dx$ und $a = \frac{dv}{dt}$

$$\sum \vec{F} = \int \frac{dv}{dt} \cdot \rho \cdot A(x) \cdot dx = \int \rho \cdot \frac{dx}{dt} \cdot A(x) \cdot dv = \int \rho \cdot v \cdot A(x) \cdot dv$$

$$\sum \vec{F} = \int \rho \cdot Q \cdot dv$$

$$\sum \vec{F} = \int \rho \cdot Q \cdot dv = \rho \cdot Q \cdot \int_1^2 dv$$

Die Integration zwischen den Grenzen x_1 und x_2 liefert als Summe der inneren Strömungskräfte

$$\sum \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot (v_2 - v_1)$$

Bezüglich der Abstützung der festen Berandung, d.h., ggf eines Rohrelementes, interessieren jedoch die *Reaktionskräfte*:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot (v_1 - v_2) = \rho \cdot Q \cdot v_1 - \rho \cdot Q \cdot v_2}$$

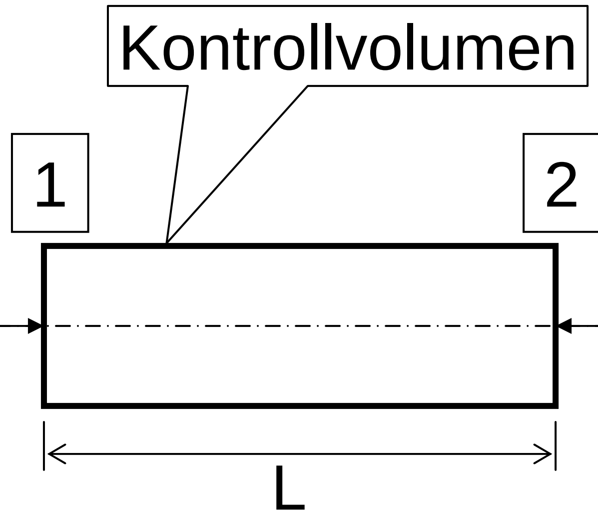
= Differenz der Impulskräfte F_{J1} und F_{J2} .

Das negative Vorzeichen vor dem Term mit v_2 bedeutet, dass die Impulskraft des aus dem Kontrollvolumen austretenden Impulses entgegen der tatsächlichen Geschwindigkeitsrichtung von v_2 anzusetzen ist.

Wegen des vektoriellen Charakters können die Kräfte in der praktischen Anwendung komponentenweise angesetzt werden.

Reaktionskräfte

Gerades Rohr:



$$p_1 \cdot A \longrightarrow \quad \rho \cdot Q \cdot v_1 \longrightarrow \qquad \longleftarrow \rho \cdot Q \cdot v_2 \longleftarrow \quad p_2 \cdot A$$

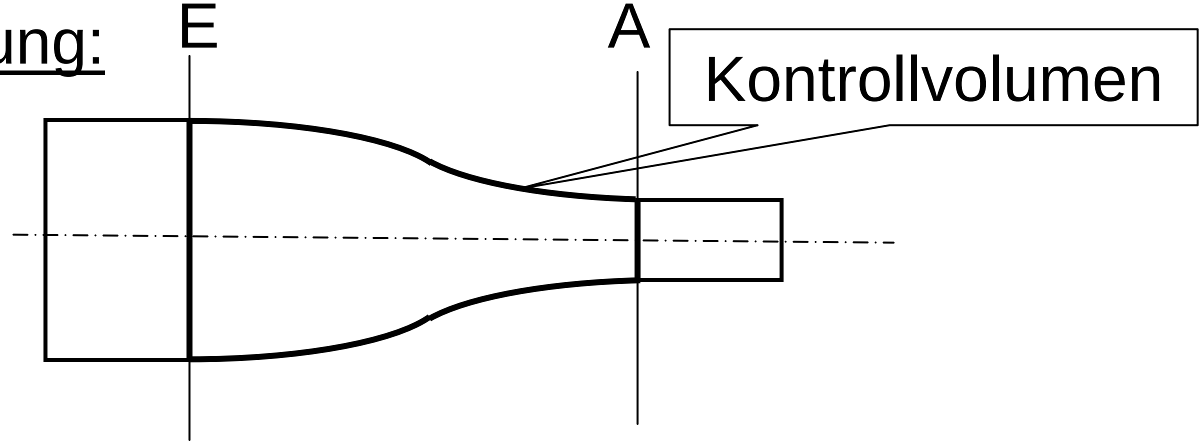
Bei *stationärer* Strömung Q durch *geradliniges* Rohrstück mit konstantem Querschnitt (= Kontrollvolumen) gibt es keine resultierende *Impuls*kraft, da sich eintretender Impuls F_{J1} und austretender Impuls F_{J2} auf gleicher Wirkungslinie wegen $v_1 = v_2$ aufheben. Wegen der Rohrreibung gibt es jedoch eine Differenz der beiden *Druckkräfte* $F_1 - F_2 = p_1 \cdot A - p_2 \cdot A = (p_1 - p_2) \cdot A$.

L= 100m, v= 5m/s, D = 1m, k= 0,002m, γ = 10kN/m³, $\nu = 10^{-6}$ m²/s

$h_V = 2{,}99\text{m} = \Delta p/\gamma$ ——> $\Delta p = 29{,}9$ kPa

$F_{res} = \Delta p \,.\, A =$ $$F_{res} = \Delta p \cdot A = 29{,}9 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 23{,}48kN$$

Querschnittsänderung:



Impulskräfte:

Eintritt: $$F_{JE} = \rho \cdot Q \cdot v_E = \rho \cdot A_E \cdot v_E^2$$

Austritt: $$F_{JA} = \rho \cdot Q \cdot v_A = \rho \cdot A_A \cdot v_A^2$$

$$Q = v_E \cdot A_E = v_A \cdot A_A \rightarrow v_E = \frac{A_A}{A_E} \cdot v_A$$

$$F_{JE} = \rho \cdot Q \cdot v_E = \rho \cdot A_E \cdot \frac{A_A^2}{A_E^2} \cdot v_A^2 = \rho \cdot A_A \cdot \frac{A_A}{A_E} \cdot v_A^2$$

Resultierende Kraft:

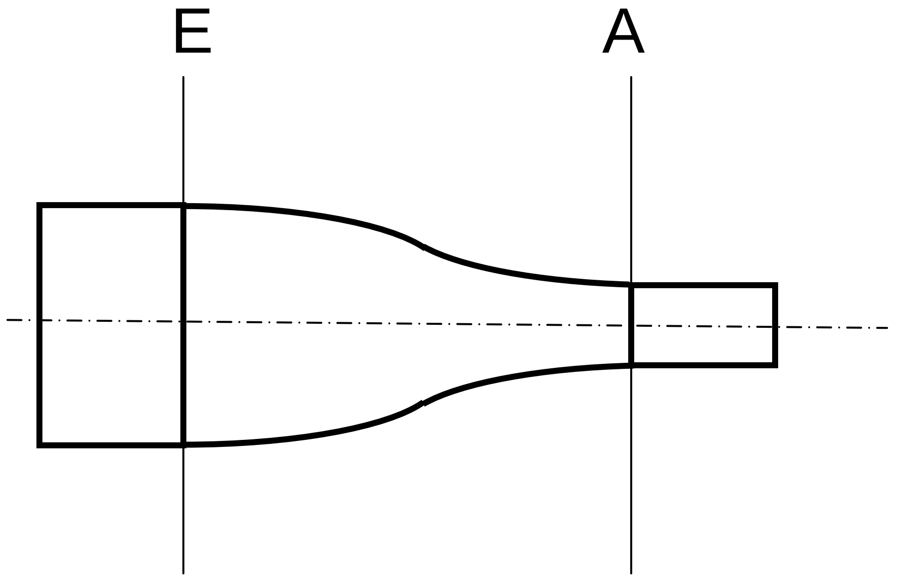
$$\boxed{F_{JR} = \rho \cdot A_A \cdot v_A^2 \cdot \left(\frac{A_A}{A_E} - 1 \right)}$$

$A_E > A_A$ nach links

$A_E < A_A$ nach rechts

(Hinzukommen die Druckkräfte !)

Aufgabe:



Bekannt:
$Q = 1 m^3/s$
$p_E = 29{,}43$ kPa
$D_E = 0{,}8 m$
$D_A = 0{,}5 m$
$\zeta_{eng} = 0{,}05$

1. Wie könnte ein unbekanntes ζ_{eng} ermittelt werden ?
2. Welchen Kräften aus stationärem Durchfluss ist die Engstelle ausgesetzt ?

Zu 1.: Messung der Druckhöhen bei E und A bei bekanntem Q. Der Energiesatz liefert:

$$h_V = \frac{p_E - p_A}{\gamma} + \frac{v_E^2 - v_A^2}{2g} = \zeta_{eng} \cdot \frac{v_A^2}{2 \cdot g}$$

$$\rightarrow \zeta_{eng} = \frac{2 \cdot g \cdot h_V}{v_A^2}$$

[vergl. BORDA-CARNOTscher Stoßverlust]

Zu 2.: $A_E = \frac{\pi \cdot 0{,}8^2}{4} = 0{,}502 \approx 0{,}5 m^2$ $\quad A_A = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{4} = 0{,}196 \approx 0{,}2 m^2$

$v_E = \frac{Q}{A_E} = \frac{1}{0{,}5} = 2 m/s \quad \frac{v_E^2}{2g} = 0{,}204 m \qquad v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{1}{0{,}2} = 5 m/s \quad \frac{v_A^2}{2g} = 1{,}274 m$

$$F_{JR} = \rho \cdot A_A \cdot v_A^2 \cdot \left(\frac{A_A}{A_E} - 1 \right) = 1 \cdot 0{,}2 \cdot 5^2 \cdot \left(\frac{0{,}2}{0{,}5} - 1 \right) = -3{,}0 kN$$

(nach links)

übersichtlicher: Impulskräfte einzeln ermitteln:

$$F_{JE} = \rho \cdot Q \cdot v_E = \rho \cdot A_E \cdot v_E^2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \cdot 0{,}5 \cdot 2^2 = 2 kN$$

$$F_{JA} = \rho \cdot Q \cdot v_A = \rho \cdot A_A \cdot v_A^2 = 1 \cdot 1 \cdot 5 = 1 \cdot 0{,}2 \cdot 5^2 = 5 kN$$

Druckkraft am Eintritt: $F_E = p_E \cdot A_E = 29{,}43 \cdot 0{,}5 = 14{,}715 kN$

Energiesatz liefert den Druck am Austritt:

$$H = \frac{p_E}{\gamma} + \frac{v_E^2}{2 \cdot g} = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2 \cdot g} + h_v \qquad \frac{p_A}{\gamma} = \frac{p_E}{\gamma} + \frac{v_E^2}{2 \cdot g} - \frac{v_A^2}{2 \cdot g} - \zeta_{eng} \cdot \frac{v_A^2}{2 \cdot g}$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = \frac{29{,}43}{1 \cdot 9{,}81} + 0{,}204 - 1{,}274 - 0{,}05 \cdot 1{,}274$$

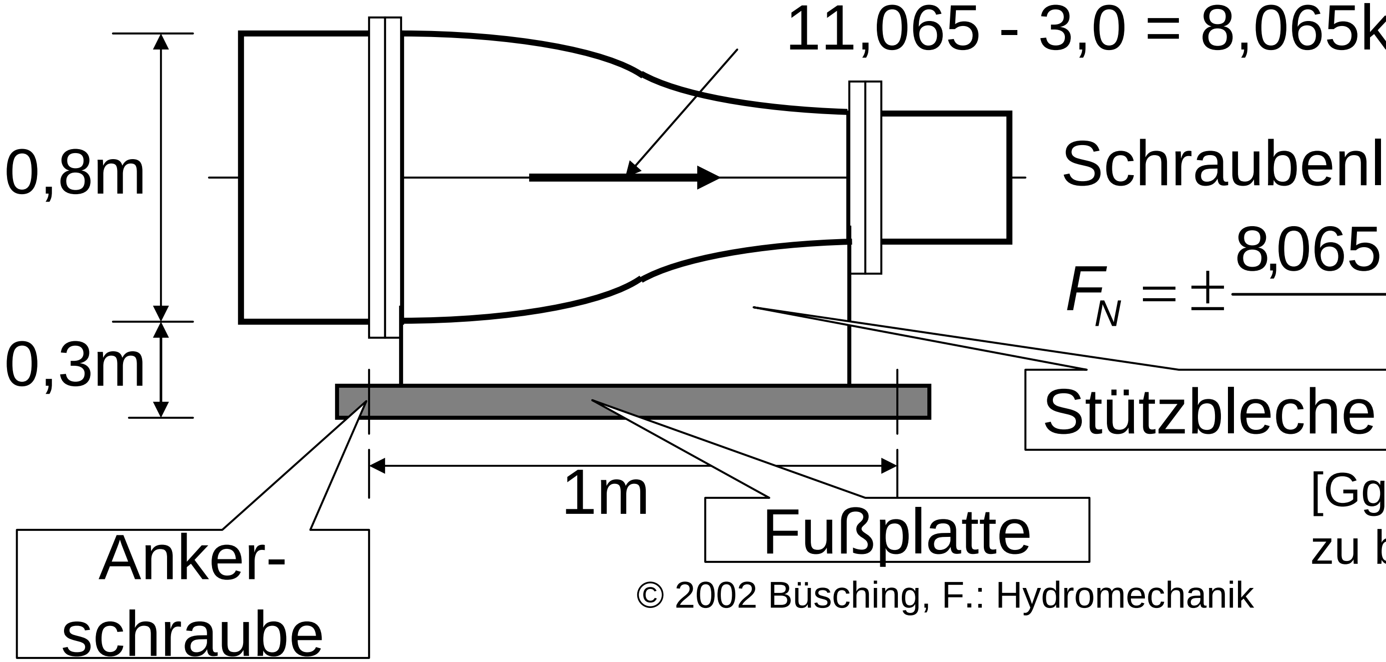
$$\frac{p_A}{\gamma} = 3{,}0 + 0{,}20 - 1{,}28 - 0{,}06 = 1{,}86m$$

$$p_A = \rho \cdot g \cdot 1{,}86 = 18{,}25kPa$$

$$F_A = p_A \cdot A_A = 18{,}25 \cdot 0{,}2 = 3{,}65kN$$

$$\Delta F = F_E - F_A = 14{,}715 - 3{,}65 = 11{,}065kN$$ (nach rechts)

11,065 - 3,0 = 8,065kN = Schubkraft

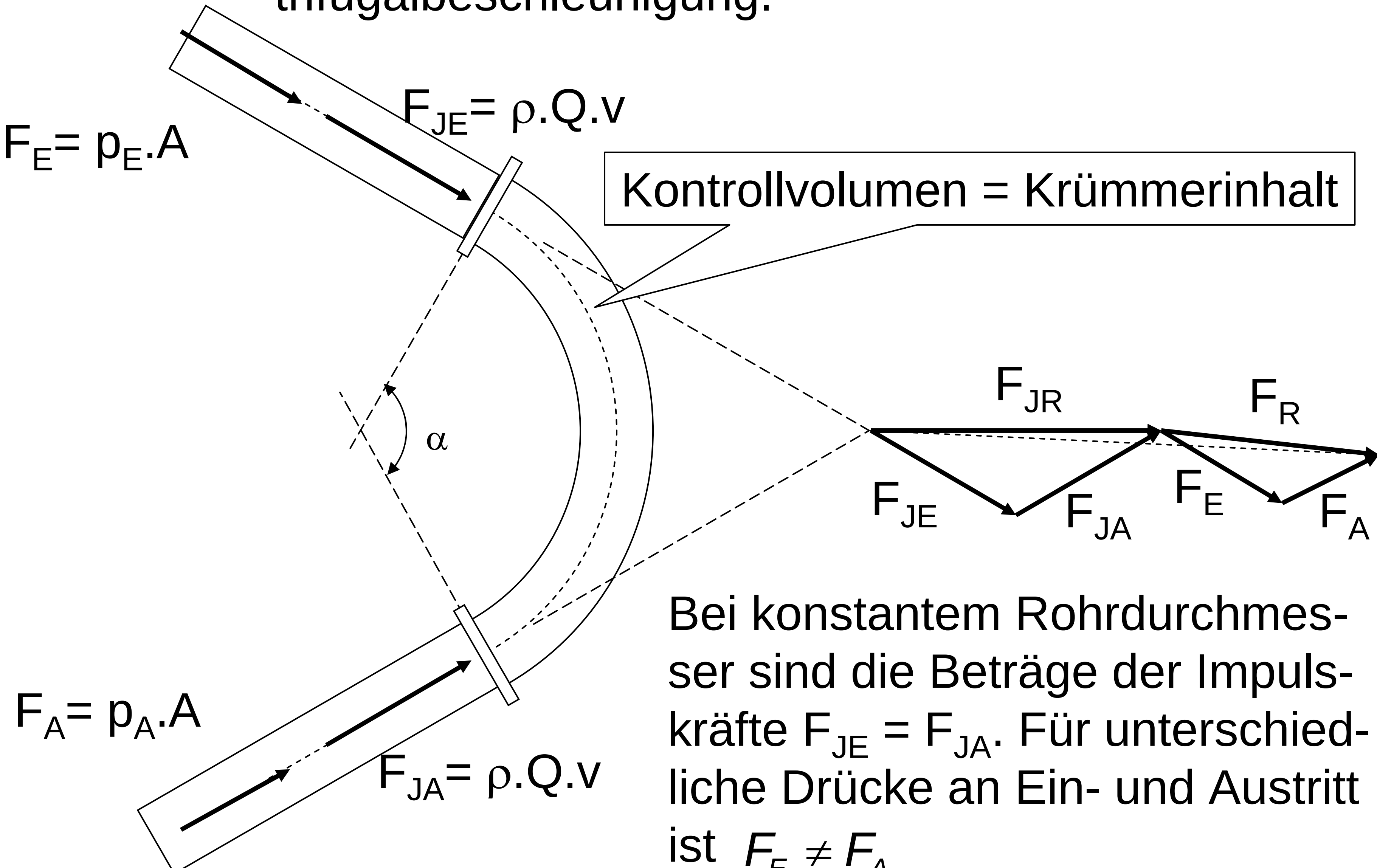


Schraubenlängskräfte:

$$F_N = \pm \frac{8{,}065 \cdot (0{,}4 + 0{,}3)}{1{,}0} = \pm 5{,}6kN$$

[Ggf. noch Eigengewichte zu berücksichtigen]

<u>Umlenkkräfte:</u> Strömungen in Krümmern unterliegen der Zentrifugalbeschleunigung.



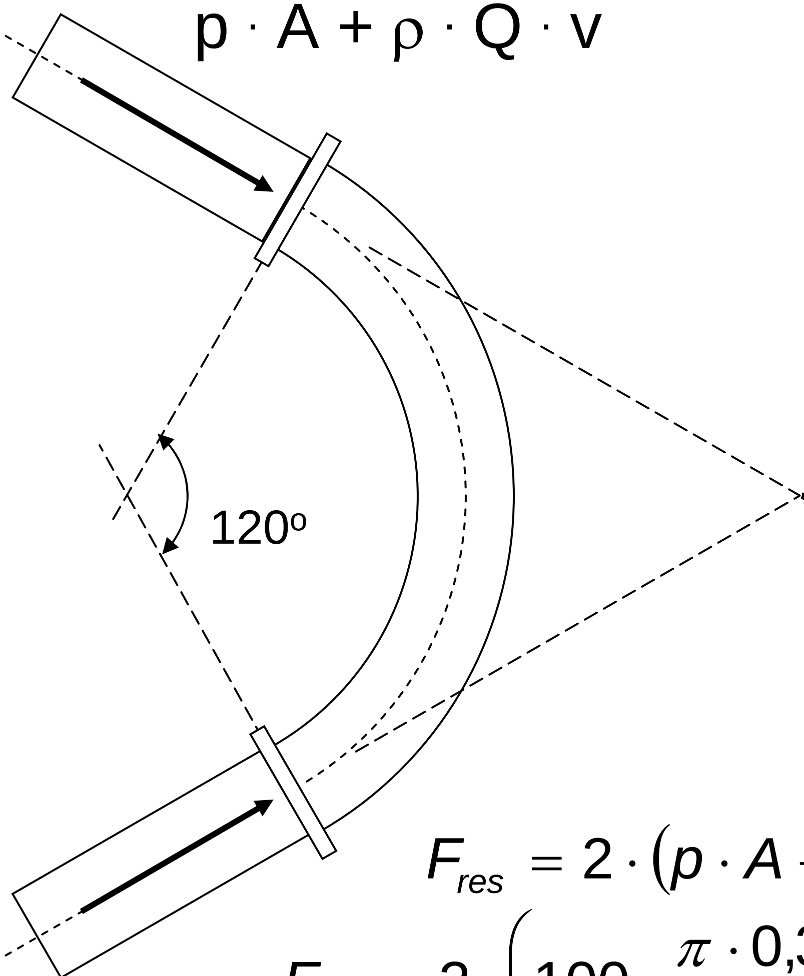
Bei konstantem Rohrdurchmesser sind die Beträge der Impulskräfte $F_{JE} = F_{JA}$. Für unterschiedliche Drücke an Ein- und Austritt ist $F_E \neq F_A$

Aufgabe: $Q = 0{,}1 m^3/s$, $D = 0{,}3 m$, Innendruck $p_E = p_A = 100 kPa$

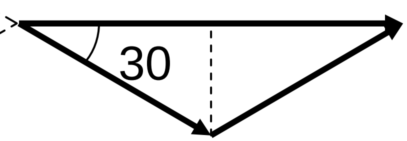
Dichte $\rho = 1 t/m^3$

Zentriwinkel $\alpha = 120^o$

$p \cdot A + \rho \cdot Q \cdot v$



Lösung: Impuls- und Druckkräfte an Ein- und Austritt haben jeweils gleiche Beträge.



$$v_E = v_A = \frac{Q \cdot 4}{\pi \cdot D^2} = \frac{0{,}1 \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}3^2} = 1{,}415 m/s$$

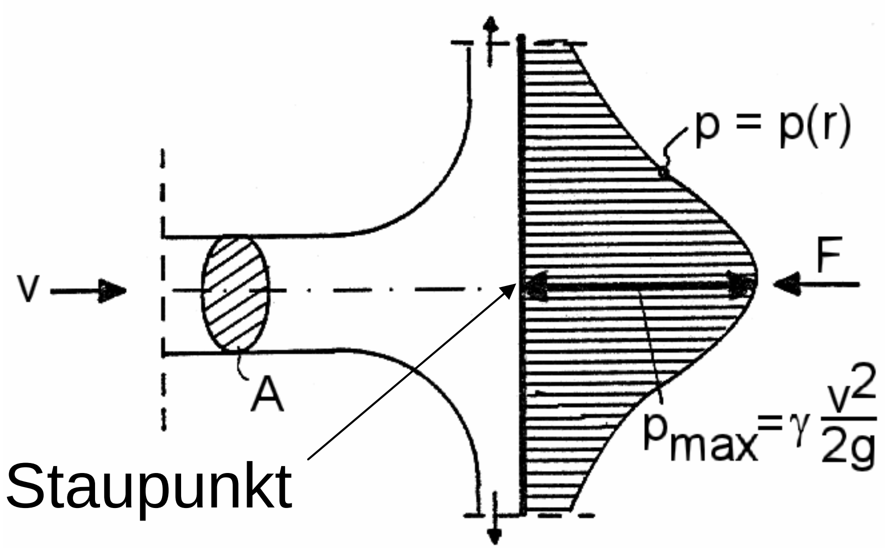
$$F_{res} = 2 \cdot (p \cdot A + \rho \cdot Q \cdot v) \cdot \cos 30^o$$

$$F_{res} = 2 \cdot \left(100 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} + 1 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}415 \right) \cdot 0{,}866 = 12{,}49 kN$$

[Ggf. noch Eigengewichte zu berücksichtigen.]

Aktionskräfte

Strahldruck und Strahldruckkraft



$$F = \rho \cdot Q \cdot v = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot v^2 = \rho \cdot A \cdot v^2$$

Ein Freistrahl trifft *normal* auf eine Wand mit der Folge einer radialen Strömungsverzweigung (am sog. Staupunkt), die einen Winkel von 90° mit dem Freistrahl bildet.

Der Aktionskraft (Impulskraft) steht die Reaktionskraft der Wand F in gleicher Größe gegenüber. Die radial ablaufenden Strahlen haben keine Komponenten in Strahlrichtung und tragen nicht zur Wandkraft bei.

Wird der Ausflussstrahl nach Torricelli auf eine senkrechte Wand gelenkt, wird mit $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

$$F = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot 2 \cdot g \cdot h = 2 \cdot \gamma \cdot A \cdot h$$

Die maximale Druckspannung (= Staudruck) am Staupunkt ergibt sich aus dem Energiesatz bezüglich der zentralen Stromlinie des Freistrahls:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p_{max}}{\gamma}$$

Staudruck:

$$\boxed{p_{max} = \gamma \cdot \frac{v^2}{2g}}$$

Mit $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

wird $p_{max} = \gamma \cdot \frac{v^2}{2g} = \gamma \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{2 \cdot g} = \gamma \cdot h$

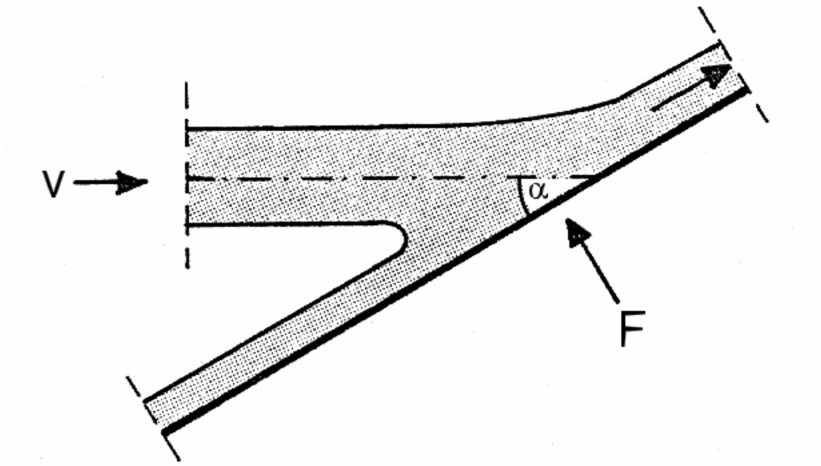
Die erzeugte maximale Druckspannung auf der Aufprallfläche ist bei einem aus einem Freispiegelbehälter austretenden Freistrahl gleich dem hydrostatischen Druck in der Tiefe h unter dem Flüssigkeitsspiegel des Behälters.

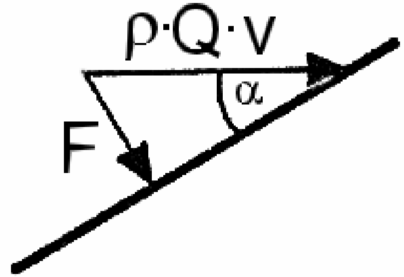
Beispiel: h = 10m, A = 1m^2 , γ = 10kN/m^3

$$F = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot 2 \cdot g \cdot h = 2 \cdot \gamma \cdot A \cdot h = 2 \cdot 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 1m^2 \cdot 10m = 200kN$$

$$p_{max} = 10 \cdot 10 = 100 \frac{kN}{m^2} = 100kPa$$

<u>Schräg auftreffender Strahl</u>



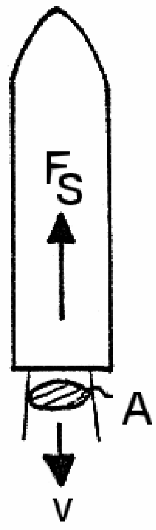


Es werden nur Kraftkomponeten *senkrecht* zur Wand betrachtet:

$$F = \rho \cdot Q \cdot v \cdot \sin\alpha = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot v^2 \cdot \sin\alpha$$

Der Betrag der Wandkraft eines unter $\alpha = 30^o$ auftreffenden Strahls (z.B. eines Hochdruckreinigers) beträgt demnach <u>noch die *Hälfte*</u> des Betrages des normal (unter 90^o) auftreffenden Strahls !

Strahlantrieb



Ein austretender Strahl übt eine Kraft entgegen seiner Ausströmrichtung aus.

$$F_S = \rho \cdot Q \cdot v = \rho \cdot A \cdot v^2$$

Beispiel:

Raketeneigengewicht F_G = 80kN
Gasdichte ρ = 1kg/m^3 = 0,001t/m^3
Düsenfläche A = 1m^2

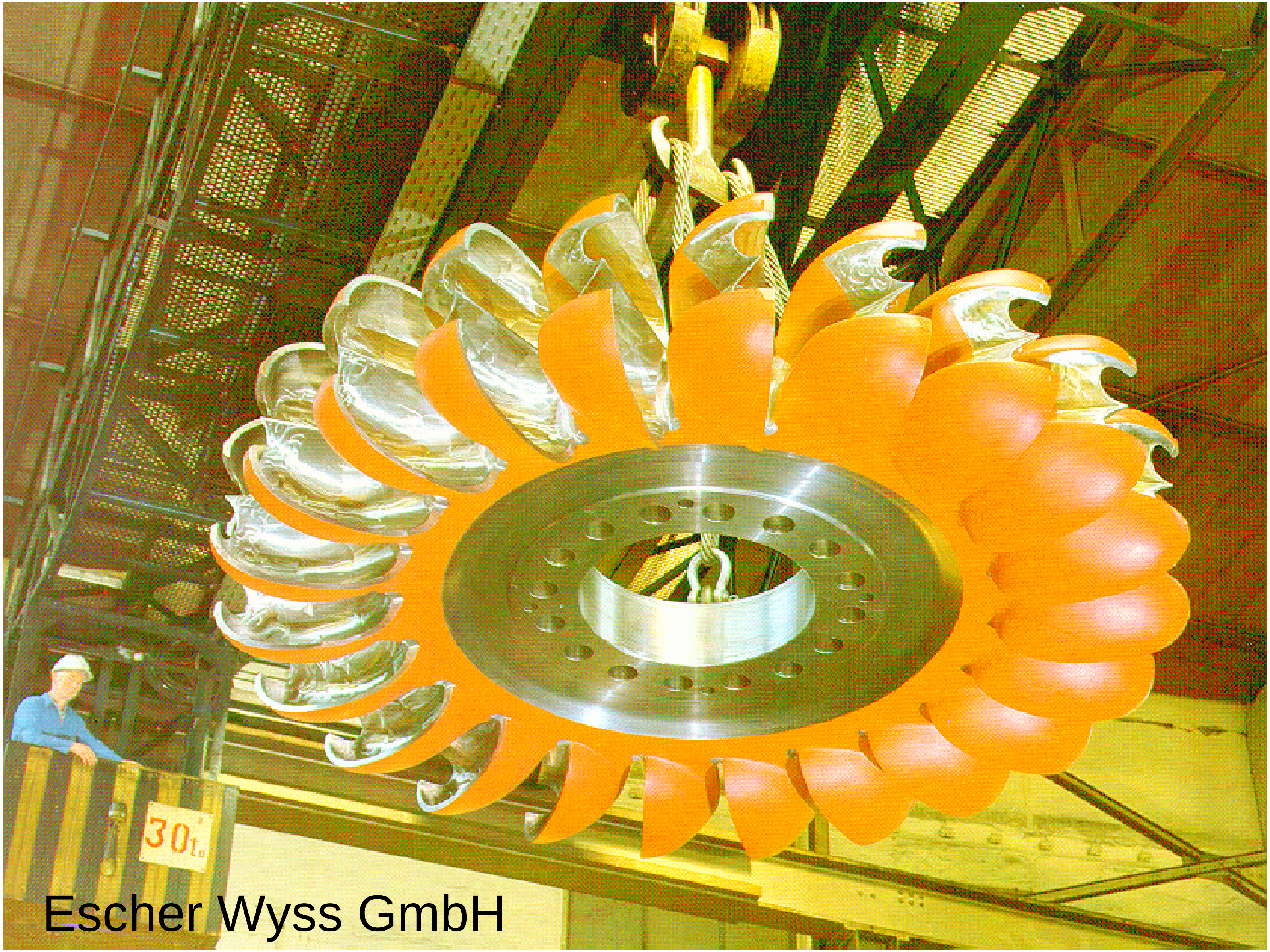
Welchen Betrag hat (näherungsweise) die mittlere Gasaustrittsgeschwindigkeit v einer Rakete im Augenblick des Abhebens ?

$$F_S = F_G = \rho \cdot Q \cdot v = \rho \cdot A \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{F_G}{\rho \cdot A}} = \sqrt{\frac{80}{0{,}001 \cdot 1}} = 282{,}44 m/s$$

[Luftwiderstand etc. vernachlässigt !]

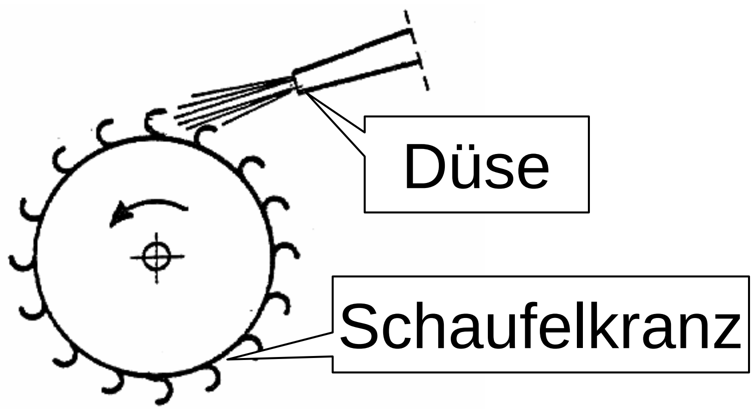
Freistrahl-Turbine nach PELTON

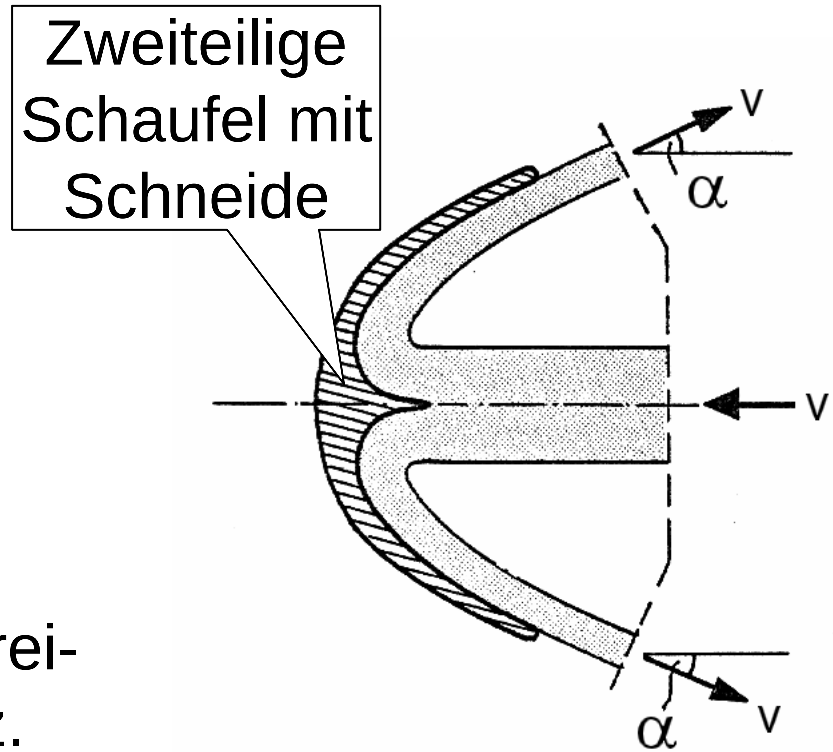


Laufrad für die Beaufschlagung mit 6 Düsen in vertikaler Anordnung.

Leistung: 175 MW

Pelton-Laufrad





Der aus der Düse austretende Freistrahl trifft auf den Schaufelkranz.

Die Schaufeln sind so geformt, dass der Strahl an der Schneide geteilt und mit der gleichen Geschwindigkeit v zurückgelenkt wird.

Die Ablenkung der Teilstrahlen um kleine Winkel α ist erforderlich, damit austretendes Wasser nicht auf benachbarte Schaufeln fällt.

Beaufschlagung Q kann auf mehrere Düsen verteilt werden.

Kräfte an der *ruhenden* Schaufel:

$$F_R = \rho \cdot Q \cdot v + 2 \cdot \rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot v \cdot \cos\alpha = \rho \cdot Q \cdot v \cdot (1 + \cos\alpha)$$

Ankommen-
der Strahl
(eintetend)

2 rückgelenkte
Strahlen
(austretend)

Nur die Strahlkomponenten in Achsrichtung werden berücksichtigt. Die senkrecht dazu stehenden Komponenten heben einander auf.

Wenn sich das Pelton-Rad mit der Umfangsgeschwindigkeit u bewegt, muss die Relativgeschwindigkeit (v - u) eingesetzt werden:

$$F_R = \rho \cdot Q \cdot (v - u) \cdot (1 + \cos\alpha)$$

Bei dieser Relativbewegung um die Strecke dx ist die geleistete Arbeit $dA = \rho \cdot Q \cdot (v - u) \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot dx$ und die Leistungsabgabe P ist

$$P = \frac{dA}{dt} = \rho \cdot Q \cdot (v - u) \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \frac{dx}{dt}$$

Mit $\frac{dx}{dt} = u$ wird die Leistungsabgabe vom Strahl auf das Rad

$$\boxed{P = \frac{dA}{dt} = \rho \cdot Q \cdot (v - u) \cdot \left(1 + \cos\alpha\right) \cdot u = F_R \cdot u} \quad [\mathrm{kW}]$$

$$P = \rho \cdot Q \cdot \left(1 + \cos\alpha\right) \cdot (v \cdot u - u^2)$$

Diese Funktion ist für v = 0 und für v = u gleich Null. Dazwischen liegt ein Maximum:

$$\frac{dP}{du} = \rho \cdot Q \cdot \left(1 + \cos\alpha\right) \cdot (v - 2 \cdot u \ ) = 0 \quad \rightarrow u = \frac{v}{2}$$

$$P_{\max} = \rho \cdot Q \cdot \left(1 + \cos\alpha\right) \cdot (\frac{v^2}{2} - \frac{v^2}{4})$$

$$\boxed{P_{\max} = \rho \cdot Q \cdot \left(1 + \cos\alpha\right) \cdot \frac{v^2}{4}} \quad [\mathrm{kW}]$$

Da die Umfangsgeschwindigkeit durch die Netzfrequenz vorgegeben wird, muss v gesteuert werden.

Im Gegensatz zur Impulsturbine (Pelton) die Leistungsformel für Reaktionsturbinen (Francis, Kaplan) und andere Strömungsmaschinen, vergl. 07.20.

Beispiel: Leistung einer Pelton-Turbine

Laufraddurchmesser	D = 0,86m
Drehzahl	n = 375/Min. = 6,25 Hz = 1/8 der Netz-frequenz
Düsendurchmesser	d = 0,08m
Durchfluss	Q = 0,210 m^3/s
Flüssigkeitsdichte	ρ = 1 t/m^3
Ablenkwinkel	$\alpha = 5^o$

Strahlgeschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}21 \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}08^2} = 41{,}78\,m/s$$

Umfangsgeschwindigkeit:

$$u = \pi \cdot D \cdot n = \pi \cdot 0{,}86 \cdot 6{,}25 = 16{,}88\,m/s$$

Kraft an rotierender Schaufel:

$$F_R = 1 \cdot 0{,}21 \cdot (41{,}78 - 16{,}88) \cdot \left(1 + \cos 5^o\right) = 10{,}43\,kN$$

Momentane Leistung:

$$P = F_R \cdot u = 10{,}43 \cdot 16{,}88 = 176{,}13\,kW$$

Maximal erzielbare Leistung:

$$P_{\text{max}} = 1 \cdot 0{,}21 \cdot \left(1 + 0{,}996\right) \cdot \frac{41{,}78^2}{4} = 182{,}92\,kW$$

Aufgabe:

Welche Beaufschlagung Q ist bei einer Pelton-Turbine für eine vorgegebene Leistung P = 4 MW erforderlich ?

Laufraddurchmesser	D = 1,5m
Drehzahl	n = 300/Min. = 5 Hz
Düsendurchmesser	d = 0,2m
Ablenkwinkel	$\alpha = 7^o$
Flüssigkeitsdichte	$\rho = 1t/m^3$

Umfangsgeschwindigkeit: $u = \pi \cdot D \cdot n = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 5 = 23{,}56 m/s$

Leistung P = 4MW = 4000kW = $F_R \cdot u = F_R \cdot 23{,}56$

$$\rightarrow F_R = 169{,}78 = \rho \cdot Q \cdot \left(1 + \cos 7^o\right) \cdot \left(\frac{Q}{A} - u\right)$$

$$Q^2 - A \cdot u \cdot Q - \frac{F_R \cdot A}{\rho \cdot \left(1 + \cos 7^o\right)} = 0$$

Quadratische Gleichung für Q.

$$Q = 0{,}5 \cdot \left[0{,}031 \cdot 23{,}56 \pm \sqrt{0{,}533 + \frac{4 \cdot 169{,}78 \cdot 0{,}031}{1 \cdot \left(1 + 0{,}993\right)}}\right] = 2{,}031 \frac{m^3}{s}$$

[für positives Wurzelvorzeichen]