Hydrodynamik (A)

Dynamik ist der Teil der Mechanik, der insbesondere die *Änderung des Bewegungszustandes* von Körpern - infolge der Einwirkung von Kräften - behandelt.

In der *Fluiddynamik* (Mechanik der Flüssigkeiten und Gase) wird angenommen, dass *Fluide* zwar aus Teilchen bestehen. Sie können aber als sogenanntes *Kontinuum* behandelt werden, - also den Raum zusammenhängend ausfüllende Materie. Dabei stellt die *Formänderung* den Regelfall dar.

Im Rahmen dieser Lehrveranstaltung wird die Dynamik nur bezogen auf Flüssigkeiten (insbesondere Wasser) behandelt.

Bewegungen sind generell durch die Existenz von *Geschwindigkeiten* v und *Beschleunigungen* a gekennzeichnet.

Wird mit s die Weglänge und mit t die Zeit bezeichnet, ist die

Geschwindigkeit: $\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$ und die Beschleunigung: $\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}}$

Die Geschwindigkeit ist eine Funktion der beiden Veränderlichen s und t.

Dann lautet das totale Differential (Zuwuchs der Funktion v(s,t) um ds in s-Richtung und dt in t-Richtung):

$$\boxed{dv = \frac{\delta v}{\delta s} \cdot ds + \frac{\delta v}{\delta t} \cdot dt}$$

Die *substantielle* Beschleunigung ist demnach:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\delta v}{\delta s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\delta v}{\delta t} \cdot \frac{dt}{dt}$$

$$a = \frac{\delta v}{\delta s} \cdot v + \frac{\delta v}{\delta t}$$

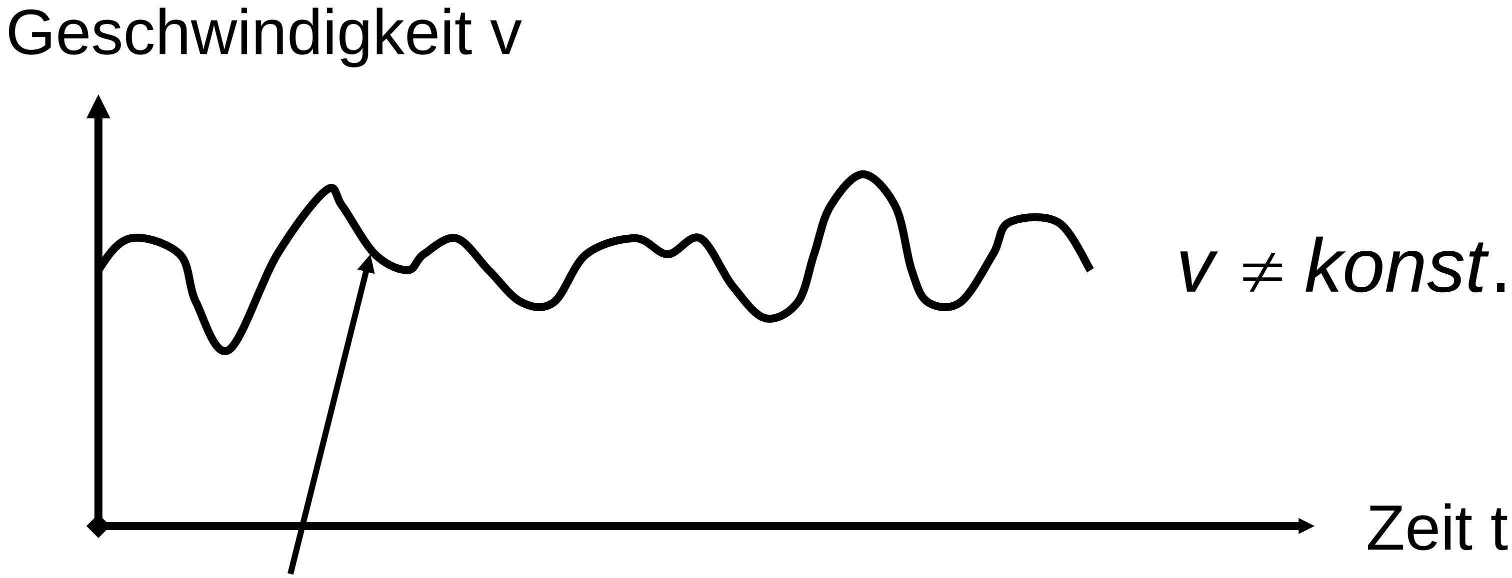
Man nennt

$\boxed{\frac{\delta v}{\delta s} \cdot v}$ = konvektive Beschleunigung und

$\boxed{\frac{\delta v}{\delta t}}$ = lokale Beschleunigung.

Instationäre Strömungen:

Im allgemeinen in Systemen mit beiden Beschleunigungsarten (Substantielle Beschleunigungen). Insbesondere ändert sich an bestimmten Orten die Geschwindigkeit über der Zeit.



$v \neq konst.$

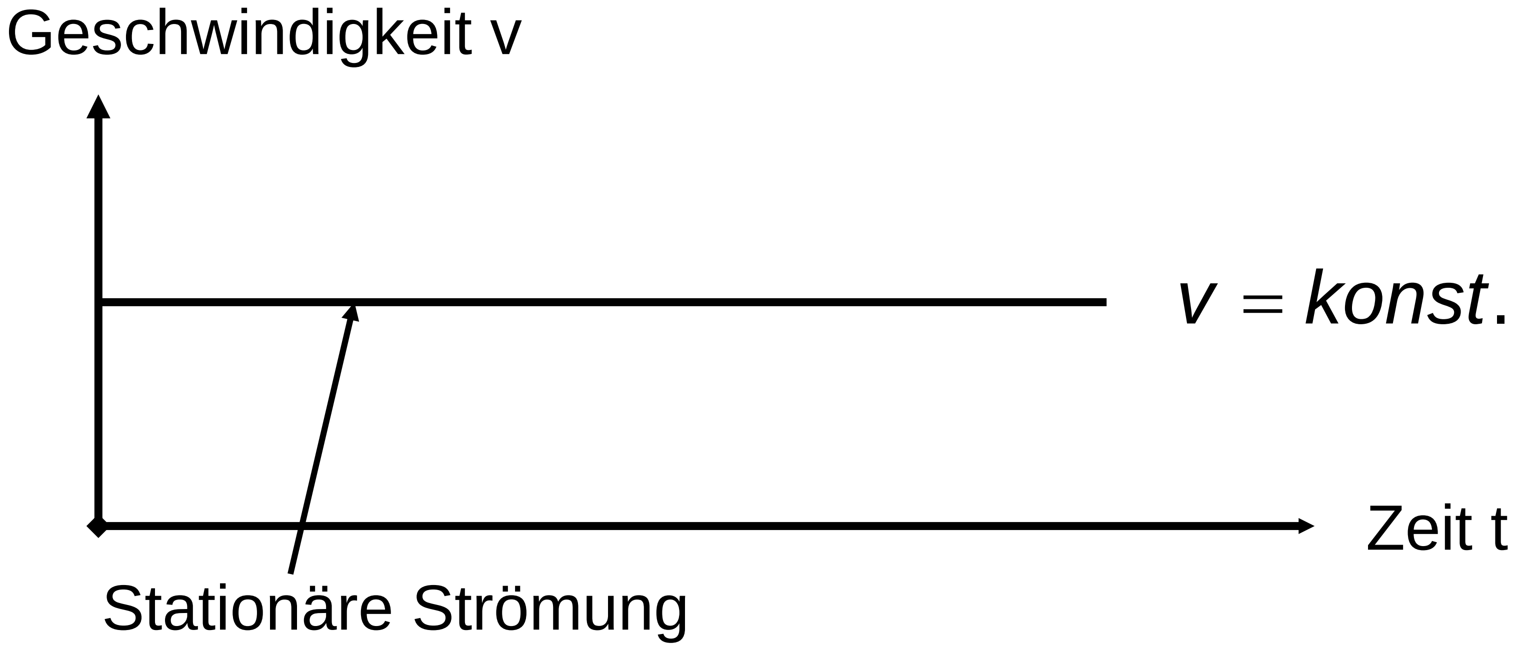
Instationäre Strömung: $\dfrac{\partial v}{\partial t} \neq 0$

Beispiele: Füll- und Entleerungsvorgänge bei Behältern (Schleusenkammern, Talsperren), Wasserwellenbewegung. ($\longrightarrow$ Hydromechanik II)

Stationäre Strömungen:

Es liegen *ausschließlich konvektive* Beschleunigungen vor.

Das instationäre Glied ist gleich Null: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

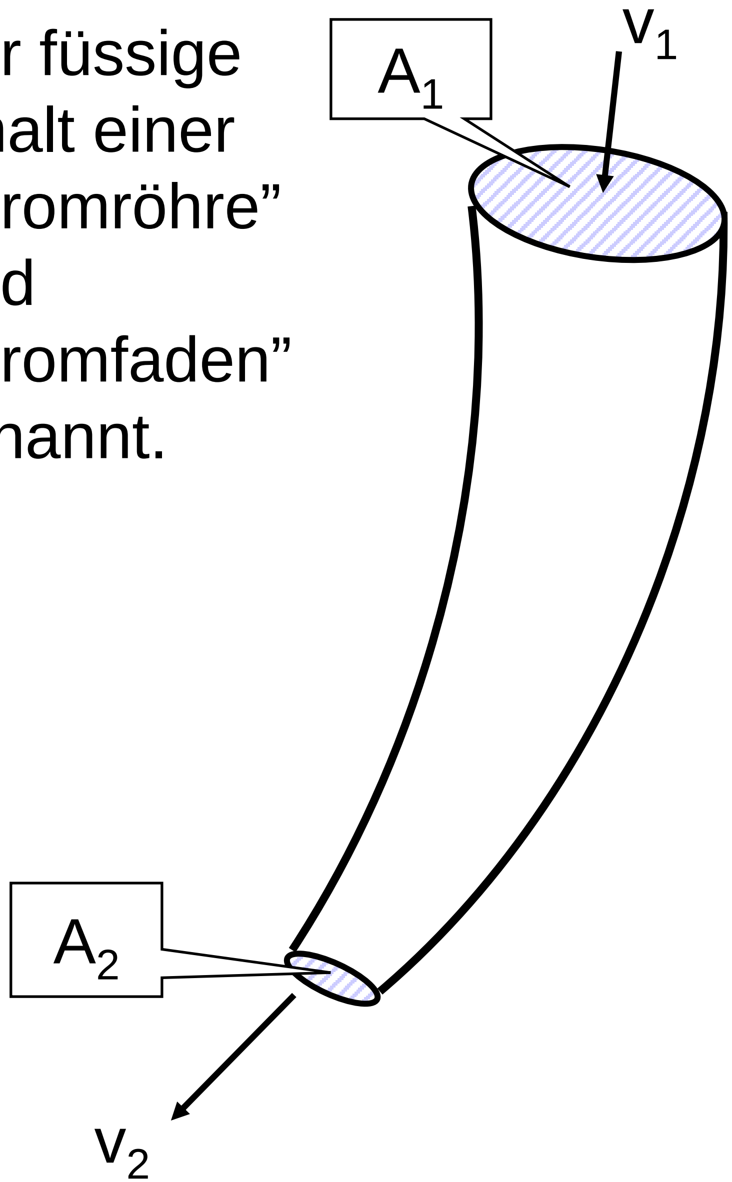


An einem *bestimmten* Ort ändert sich die Geschwindigkeit v *nicht* über der Zeit t. Die Geschwindigkeit kann sich aber von Ort zu Ort ändern.

Stationäre Strömungen werden in der Hydromechanik I ausschließlich behandelt.

Kontinuitätsgleichung:

Der füssige Inhalt einer "Stromröhre" wird "Stromfaden" genannt.



Bei stationärer Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit dringt in der Zeiteinheit dt in ein Kontrollvolumen (zwischen A_1 und A_2) das gleiche elementare Volumen dV ein, das in der gleichen Zeiteinheit auch wieder austritt:

$$dV = A_1 \cdot v_1 \cdot dt = A_2 \cdot v_2 \cdot dt$$

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

Der Durchfluss Q (in Volumen pro Zeiteinheit, z.B. in m^3/s) ist konstant:

$$\boxed{Q = A \cdot v = konst.}$$

Anwendung auf *kompressible* Medien:

Bei kompressibler Flüssigkeit (Gas) tritt an die Stelle des Volumens die ein- und austretende *Masse*.

$$\boxed{\rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2}$$

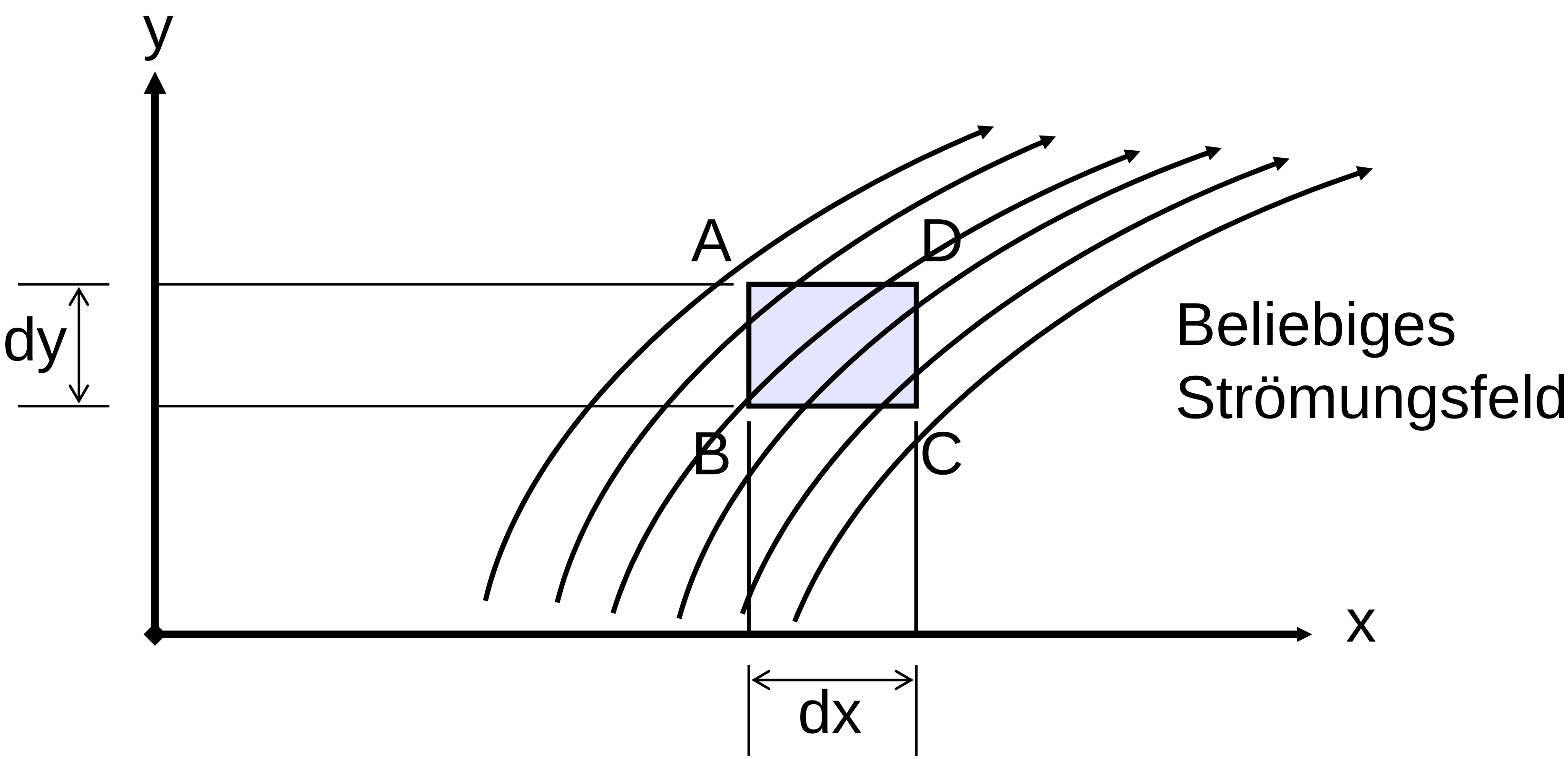
Der Massenstrom Q_M (z.B. in t/s) bleibt konstant:

$$\boxed{Q_M = \rho \cdot A \cdot v = konst.}$$

Dies ist der Satz von der Erhaltung der Masse.
Demnach ist die Kontinuitätsgleichung der Hydromechanik eine besondere Form dieses Satzes für *inkompressible Flüssigkeiten*, die dadurch gekennzeichnet sind, dass

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho = konst\ .$$

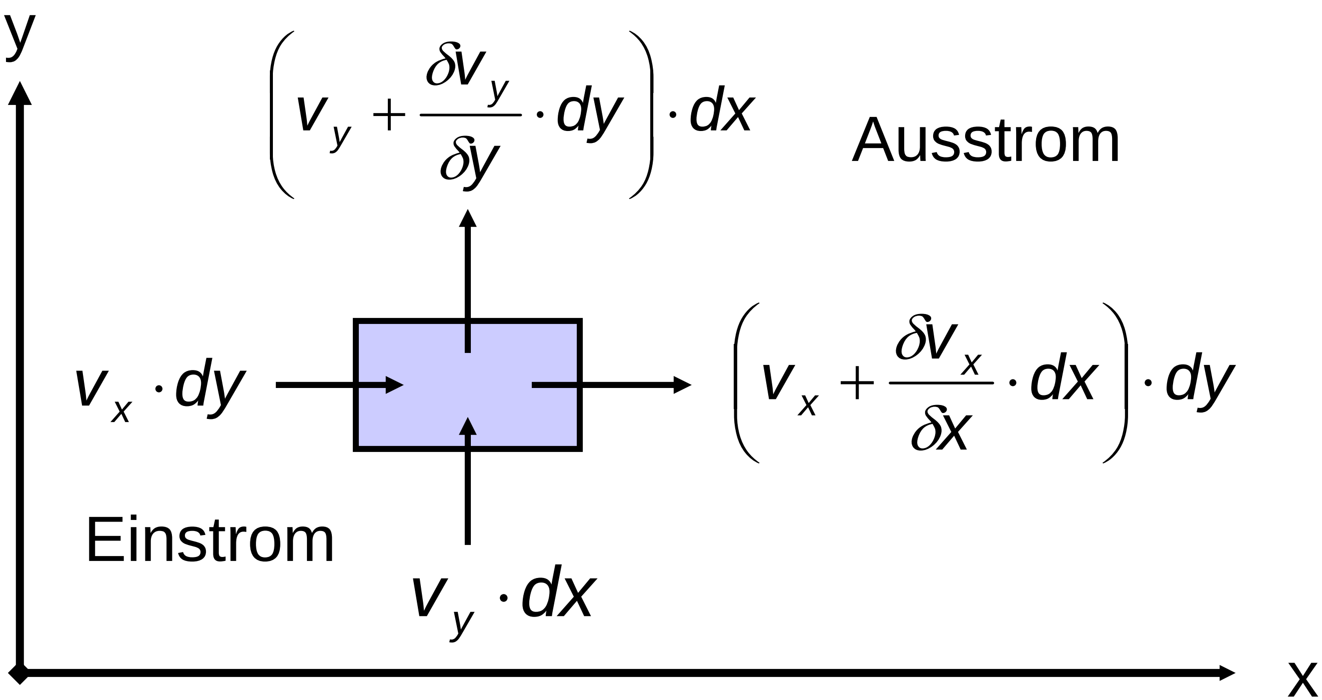
Zweidimensionale Strömung:



Die Formulierung der Kontinuitätsbedingung für eine ebene (zweidimensionale) Strömung greift auf die Darstellung eines Strömungsfeldes mit Hilfe von Stromlinien zurück.

Unter den oben dargestellten Strömungsbedingungen herrscht auf den Seiten AB und BC des infinitesimalen Rechteckes ABCD Einstrom und auf den Seiten CD und DA Ausstrom.

Die Strömungsgeschwindigkeit ändert sich sowohl in x- als auch in y-Richtung mit dem Ort: ($\longrightarrow$ konvektive Beschleunigung)



Einstrom = Ausstrom

$$v_x \cdot dy + v_y \cdot dx = v_y \cdot dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx + v_x \cdot dy + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy$$

$$0 = \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \,\Big|\, \cdot \frac{1}{dx \cdot dy}$$

Kontinuitätsgleichung für zweidimensionale Strömungen:

$$\boxed{\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} = 0}$$

Kontinuitätsgleichung für dreidimensionale Strömungen:

$$\boxed{\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} + \frac{\delta v_z}{\delta z} = 0}$$

<u>In Worten:</u>
Die *Summe* der Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten bezüglich der Kordinatenrich-tungen (partiellen Ableitungen) ist gleich Null.

Allgemeine Aussage der Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{Q = A \cdot v = konst.}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit wird umso höher, je kleiner der Durchströmquerschnitt A ist:

$$\boxed{v = \frac{Q}{A}}$$

Beispiel: $Q = 1m^3/s$ = konst.

$A_1 = 1m^2$; $\longrightarrow$ $v_1 = Q/A_1 = 1m/s$

$A_2 = 0{,}1m^2$; $\longrightarrow$ $v_2 = Q/A_2 = 10m/s$

Beispiel: Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{Q = A \cdot v = konst.}$$

gegeben:

$v_0 = 0{,}5 m/s$

$D_1 = 0{,}5 m$

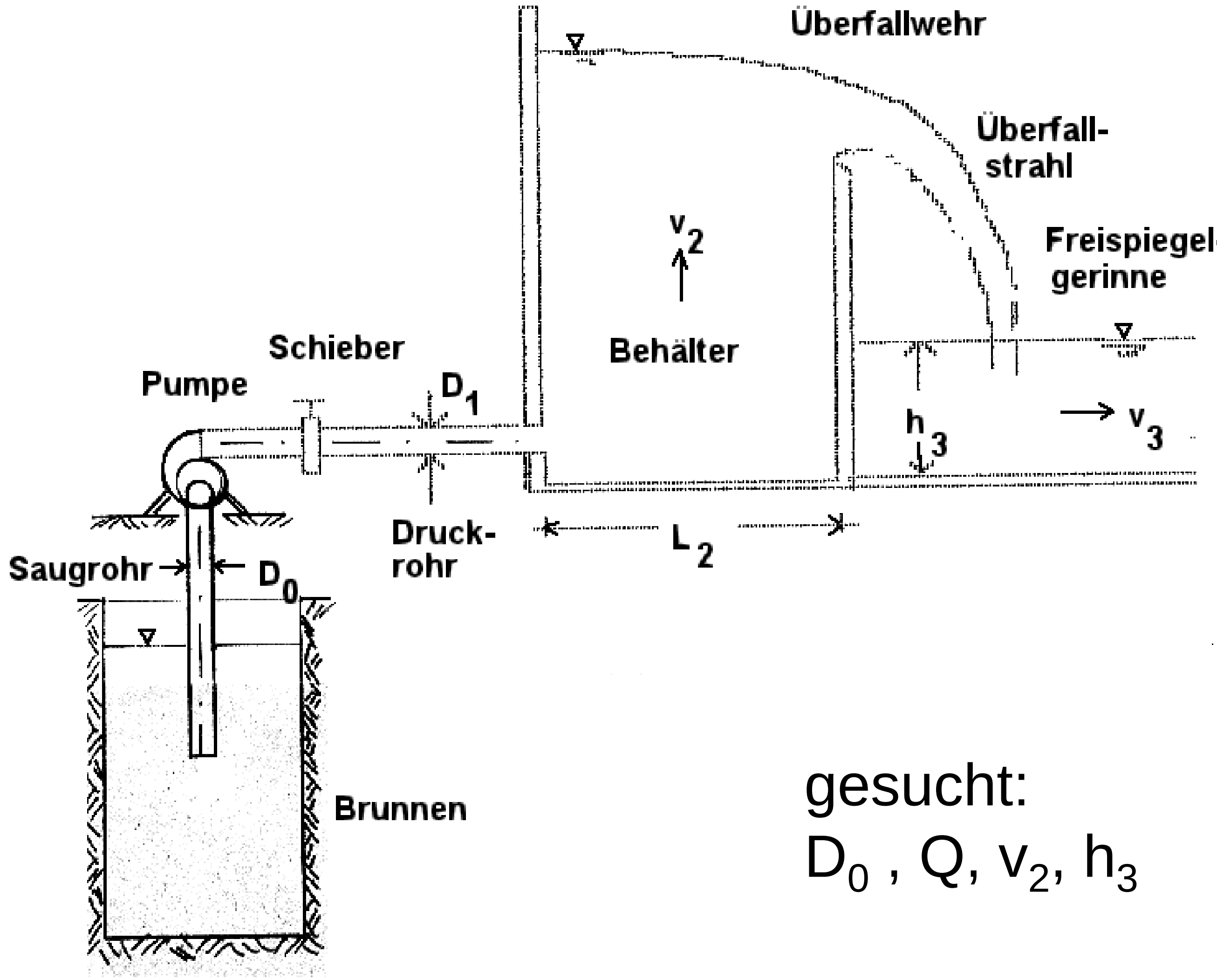
$v_1 = 3 m/s$

$L_2 = 1{,}0 m$

$B_2 = 1{,}0 m$

$B_3 = 1{,}0 m$

$v_3 = 0{,}4 m/s$



gesucht:

D_0, Q, v_2, h_3

$$Q = v_1 \cdot A_1 = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{4} = 0{,}589\, m^3/s = v_0 \cdot A_0$$

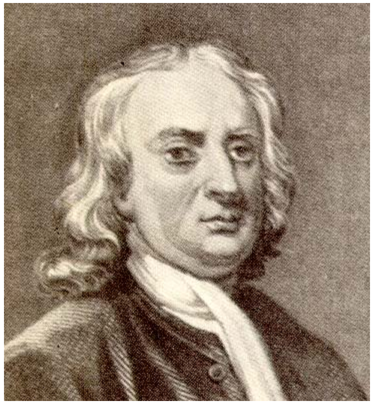
$$Q = v_0 \cdot A_0 \rightarrow D_0 = \sqrt{\frac{0{,}589 \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}5}} = 1{,}225 m$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0{,}589}{1 \cdot 1} = 0{,}589 m/s$$

$$v_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{0{,}589}{B_3 \cdot h_3} \rightarrow h_3 = \frac{0{,}589}{1{,}0 \cdot 0{,}4} = 1{,}473\, m$$

<u>Energiesatz:</u> Satz von der Erhaltung der Energie.

Ableitung des Energiesatzes (synthetisch)

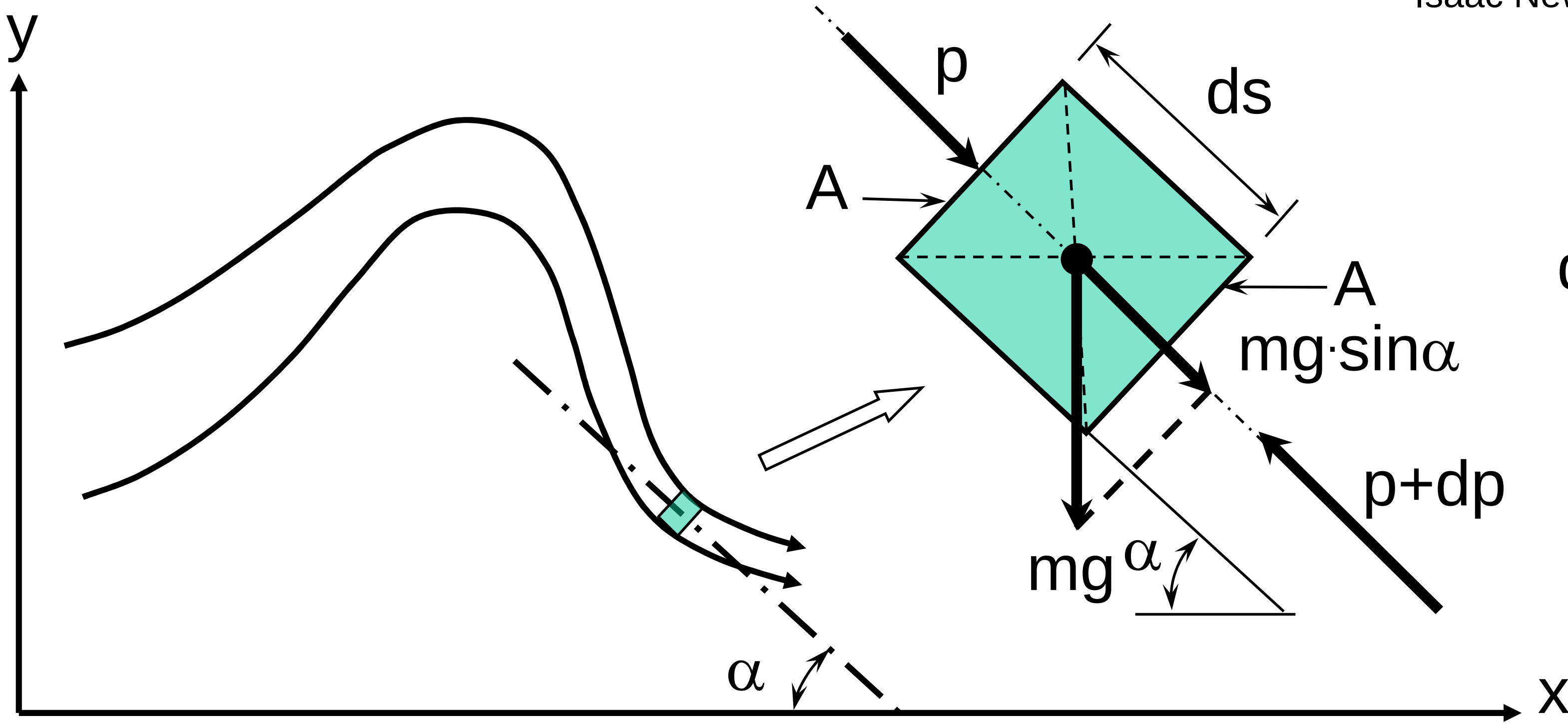


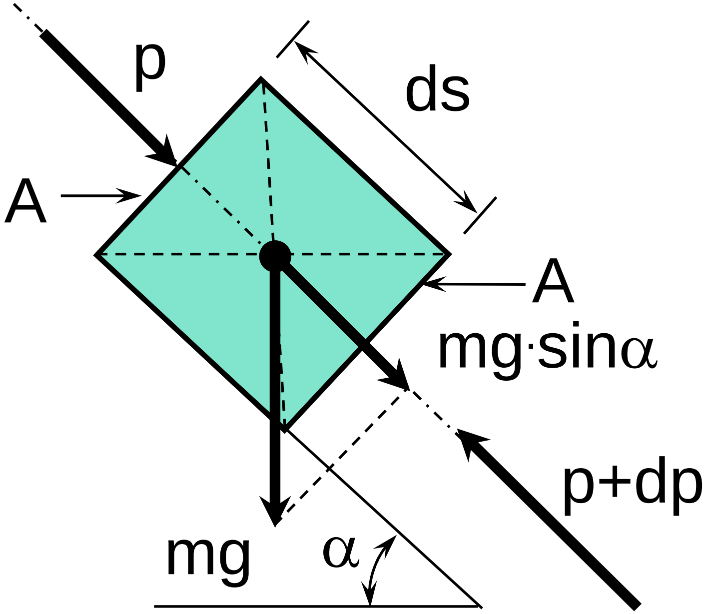
Isaac Newton (1643-1727)

Der Energiesatz folgt als ein sog. intermediäres Integral (= Zwischenform) aus der NEWTONschen Grundgleichung.

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

Für *<u>reibungsfreie</u>*, stationäre und zweidimensionale Strömung:





Es wird aus einem beliebig gefomten Stromfaden in der x-y-Ebene ein infinitesimales Element der Länge ds herausgeschnitten und die Kräfte <u>in Bewegungsrichtung</u> betrachtet.

Die resultierende Kraft ergibt sich zu

$$F = m \cdot g \cdot \sin \alpha - A \cdot dp$$

Schwerkraft-anteil Druck-anteil

A ist dabei der (beliebige) Durchflussquerschnitt des Stromfadens.
Der (unbekannte) Druck ändere sich auf dem Wege ds um dp.
Der Druckanteil ist bei der Drucksteigerung dp negativ, weil ein positiver Druckanstieg der Bewegung entgegenwirkt.

(Reibungskräfte etwa an den Begrenzungen entlang ds bleiben unberücksichtigt !)

$$F = m \cdot g \cdot \sin\alpha - A \cdot dp$$

Es wird zunächst die <u>rechte Seite der Gleichung</u> betrachtet:

Die Masse des herausgeschnittenen Elementes ist

$$m = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot ds$$

Da eine Betrachtung in der sich mit dem Wege s ändernden Bewegungsrichtung im x-y-Koordinatensystem ungünstig ist, wird ds ausgedrückt durch

$$ds = \frac{dx}{\cos\alpha}$$

Es wird $F = m \cdot a = \rho \cdot A \cdot \dfrac{dx}{\cos\alpha} \cdot g \cdot \sin\alpha - A \cdot dp$ und weiter

$$F = m \cdot a = \rho \cdot A \cdot dx \cdot g \cdot \tan\alpha - A \cdot dp$$

Bei der gewählten Geometrie ist die Steigung der Bahnlinie negativ (stumpfer Komplimentärwinkel zu α), d.h.,

damit ist $\tan\alpha = -y' = -\dfrac{dy}{dx}$

$$F = m \cdot a = \rho \cdot A \cdot dx \cdot g \cdot \left(-\frac{dy}{dx} \right) - A \cdot dp$$

$$F = m \cdot a = -\rho \cdot A \cdot g \cdot dy - A \cdot dp$$

<u>Linke Seite der Gleichung:</u>

Mit a = dv/dt wird

$$F = m \cdot a = \rho \cdot A \cdot ds \cdot \frac{dv}{dt}$$

Darin ist ds/dt = v und es wird

$$F = m \cdot a = \rho \cdot A \cdot v \cdot dv$$

Linke Seite = rechte Seite:

$$F = \rho \cdot A \cdot v \cdot dv = -\rho \cdot A \cdot g \cdot dy - A \cdot dp \left| \frac{1}{A \cdot \rho \cdot g} \right.$$

$$\frac{v \cdot dv}{g} = -dy - \frac{dp}{\rho \cdot g}$$

$$\frac{v \cdot dv}{g} = -dy - \frac{dp}{\rho \cdot g}$$

Umgestellt und Integration:

$$\int dy + \frac{1}{\rho \cdot g}\int dp + \frac{1}{g}\int v \cdot dv = 0$$

ergibt bei unbestimmter Integration:

$$y + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} + C = 0$$

Energiesatz:

$$\boxed{y + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} = C}$$

Die Integrationskonstante C ist frei wählbar und wird hier durch die Wahl eines “Bezugshorizontes” y = 0 (als Randbedingung) bestimmt. C = h_E ist dann die Höhe des *Energiehorizontes* über dem *Bezugshorizont*. Sie wird als Gesamthöhe h_E bezeichnet und ist für das Gesamtsystem konstant.

Bei bestimmter Integration bezüglich zweier Stellen 1 und 2 des Stromfadens wird:

$$\int_1^2 dy + \frac{1}{\rho \cdot g}\int_1^2 dp + \frac{1}{g}\int_1^2 v \cdot dv = 0$$

$$(y_2 - y_1) + \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot (p_2 - p_1) + \frac{1}{g}\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right) = 0$$

Nach Umstellung lautet die *Höhenform* des Energiesatzes:

$$\boxed{y_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = y_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g}}$$

Orts-höhe	Druck-höhe	Geschwin-digkeitshöhe

Die Ortshöhe y[m]

repräsentiert die *Potentielle Energie* (Energie der Lage). Sie ist die mit einem Vorzeichen behaftete Entfernung des betreffenden *Schwerpunktes* des Durchströmquerschnittes vom *Bezugshorizont $y = 0$*. Sie bezeichnet die Lage der *zentralen Stromlinie*.

Die Druckhöhe $p/\gamma = p/\rho g$ [m]

repräsentiert die *Druckenergie.* Sie erstreckt sich vom Schwerpunkt des Durchströmquerschnittes aus *positiv* (nach oben) für Druckspannungen $p > p_B$ (= barometrischer Luftdruck) und *negativ* für Druckspannungen $p < p_B$, d.h., für Unterdrücke.
Sie bezeichnet die Lage der *Drucklinie*.

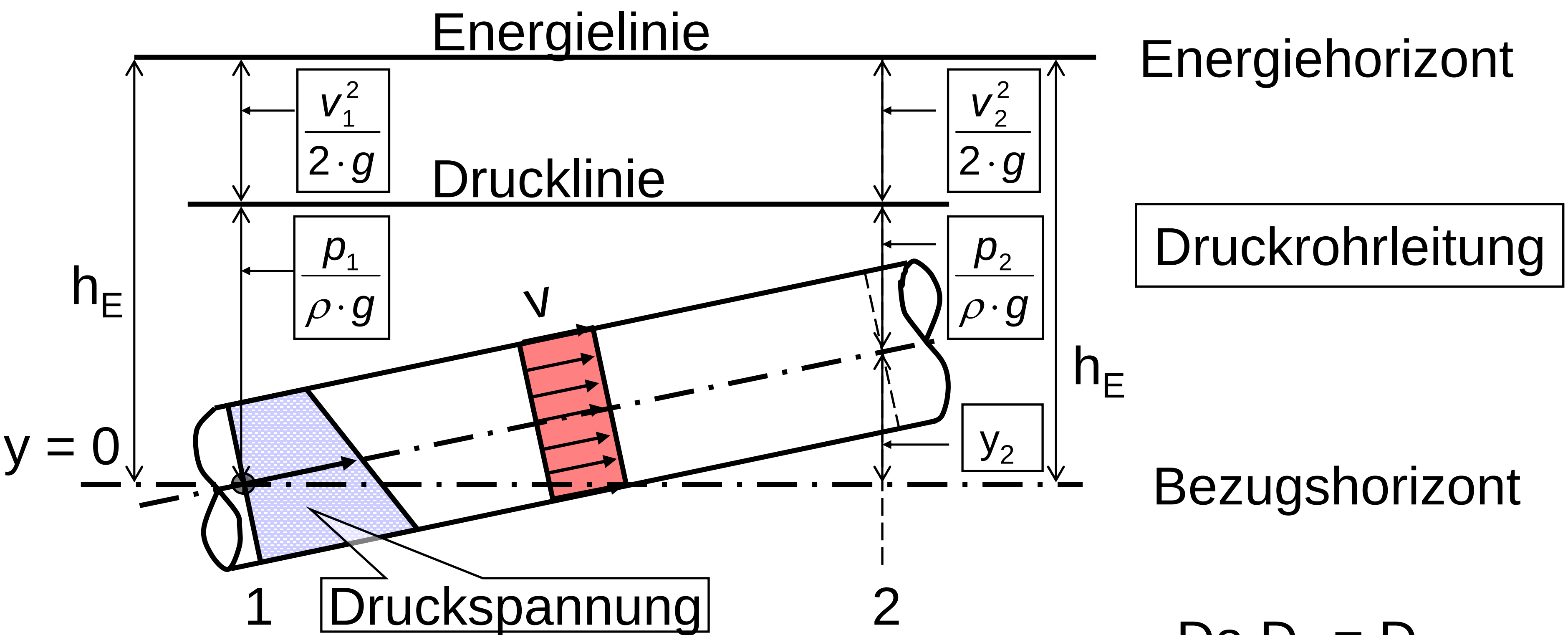
Die Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ [m]

repräsentiert die *Kinetische Energie.* Sie ist positiv und erstreckt sich zwischen der *Drucklinie* und der *Energielinie*.

Die Gesamthöhe h_E [m]

repräsentiert die Summe aller Energieanteile. Sie erstreckt sich zwischen *Bezugshorizont* und *Energielinie*.

Beispiel: Reibungsfreie Strömung in einem geneigten Rohr; Bezugshorizont y = 0 im Schwerpunkt von Querschnitt A_1

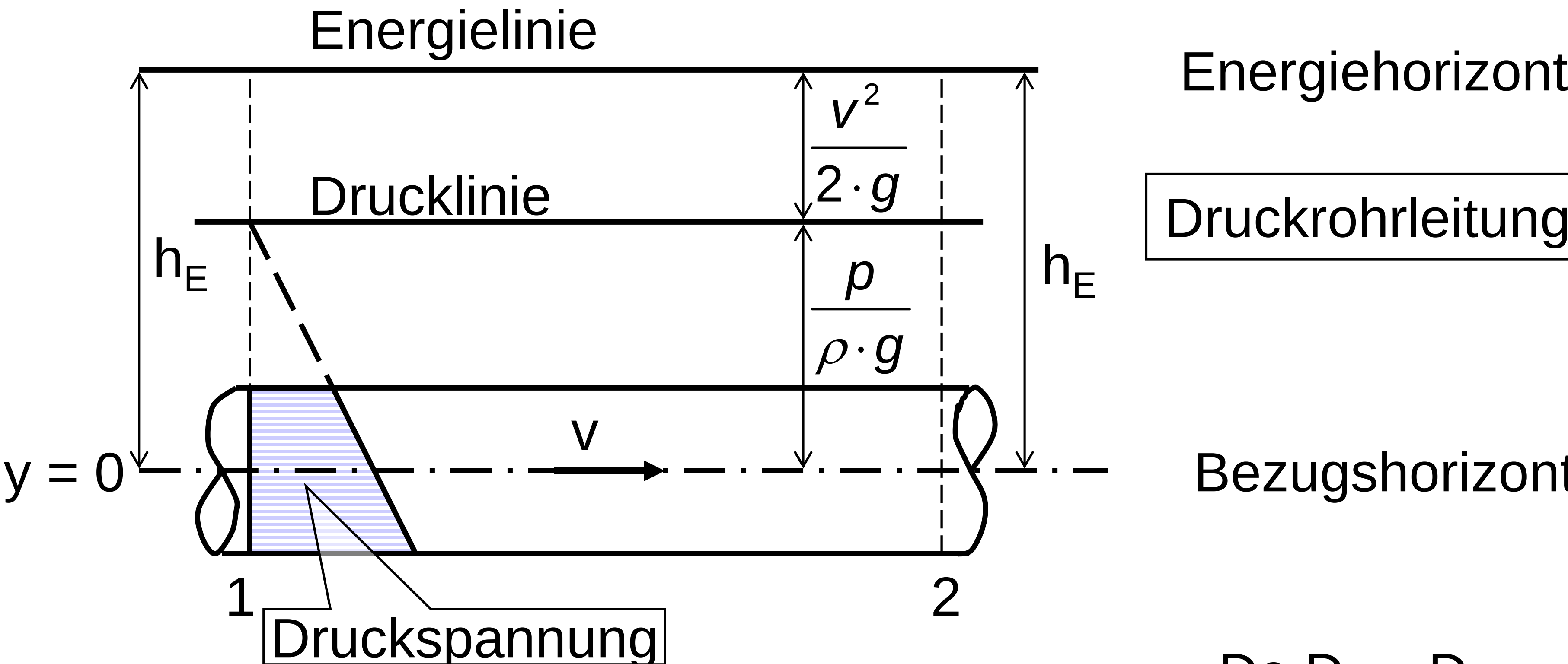


$$h_E = y_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = y_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

Da $D_1 = D_2$, ist auch $v^2/2g$ = konst.

Wird der frei wählbare Bezugshorizont in den Schwerpunkt eines Rohrquerschnittes gelegt, wird hier die Ortshöhe gleich Null.

Beispiel: Horizontale Rohrströmung mit Durchmesser D reibungsfrei; Bezugshorizont y = 0 in Höhe der Rohrachse.

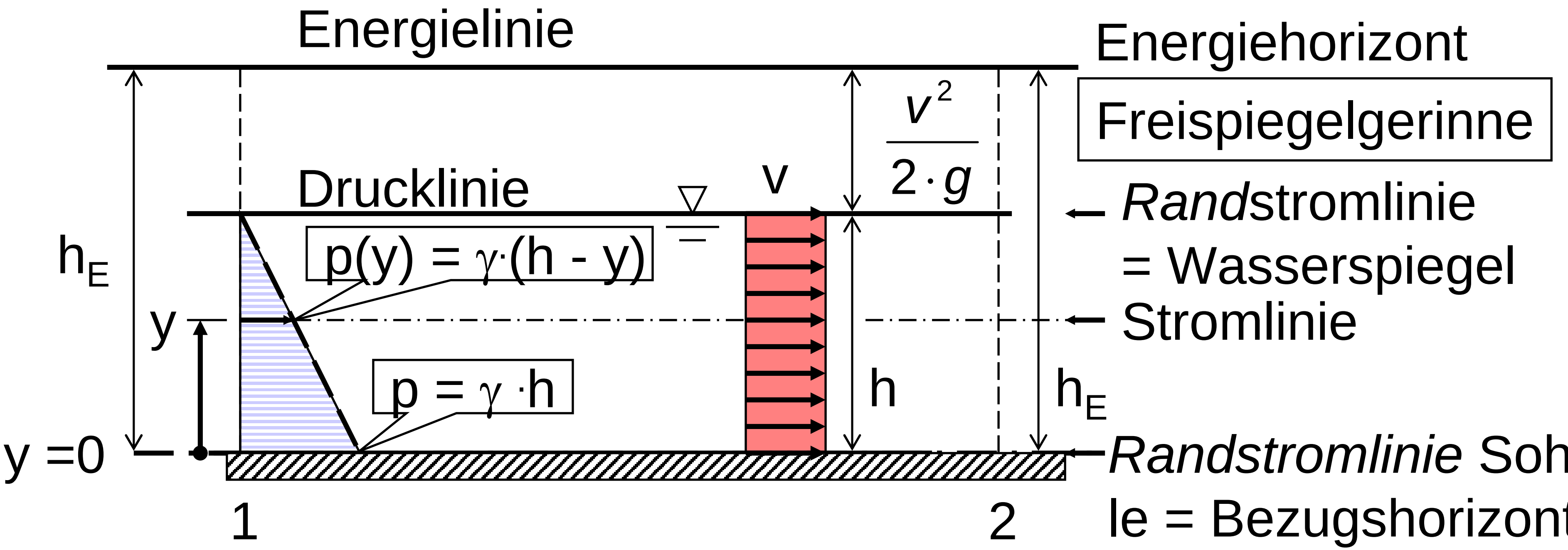


$$\boxed{h_E = y_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = y_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}}$$

Da $D_1 = D_2$, ist auch $v^2/2g$ = konst.

Wird der frei wählbare Bezugshorizont in die horizontale Rohrachse gelegt, sind beide Ortshöhen gleich Null.

Beispiel: *Horizontale* Freispiegelströmung reibungsfrei; Bezugshorizont y = 0 in Höhe der Sohle



Für alle Stromlinien ist v(y) = konst. und die hydrostatische Druckspannung p = γ·(h - y). Es wird dann

$$y + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2 \cdot g} = y + (h - y) + \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Der Energiesatz für <u>Freispiegelgerinne</u> vereinfacht sich:

$$\boxed{h + \frac{v^2}{2 \cdot g} = h_E = konst.}$$