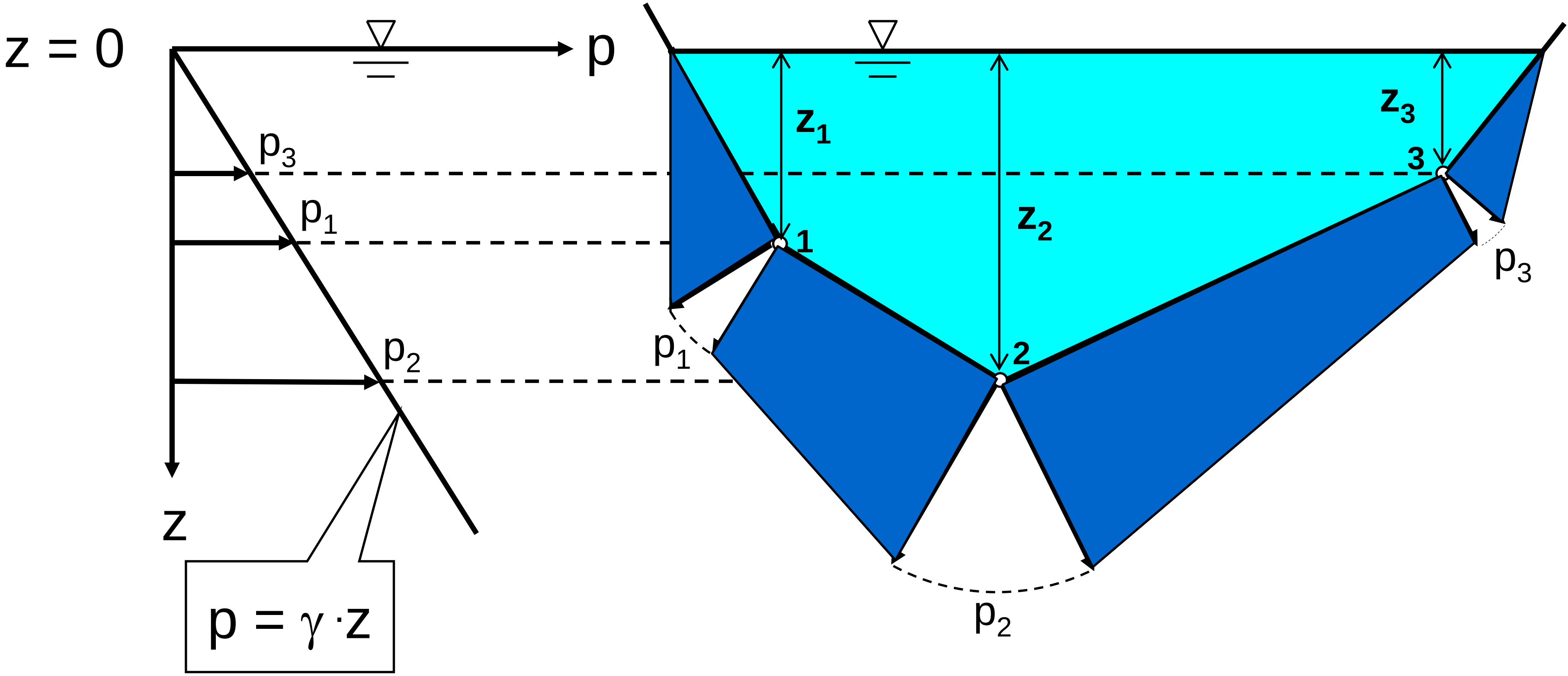
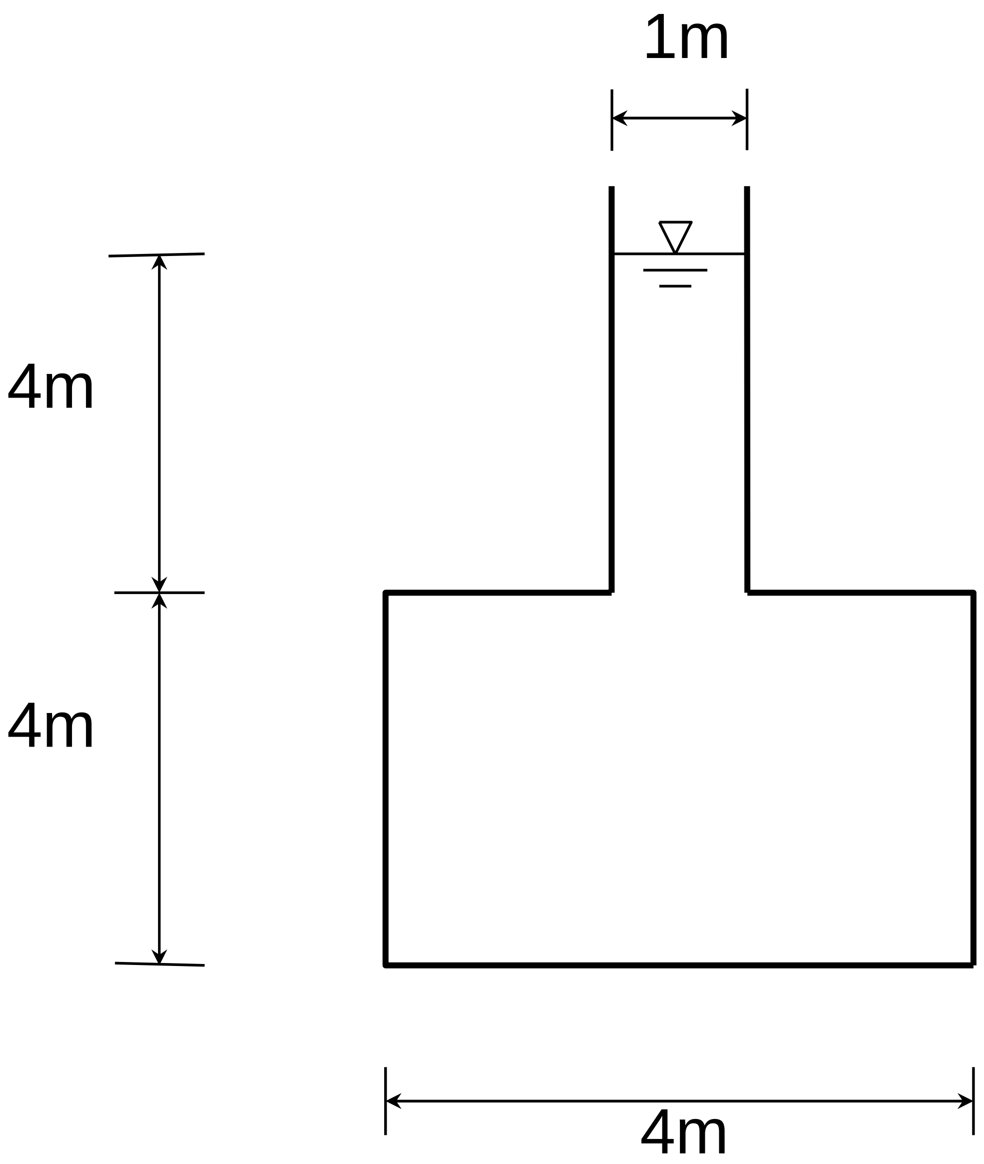
1.04 Druck an ebenen Flächen

Zur Konstruktion einer Druckspannungsverteilung, allgemein.
Flüssigkeit in einer Grube.

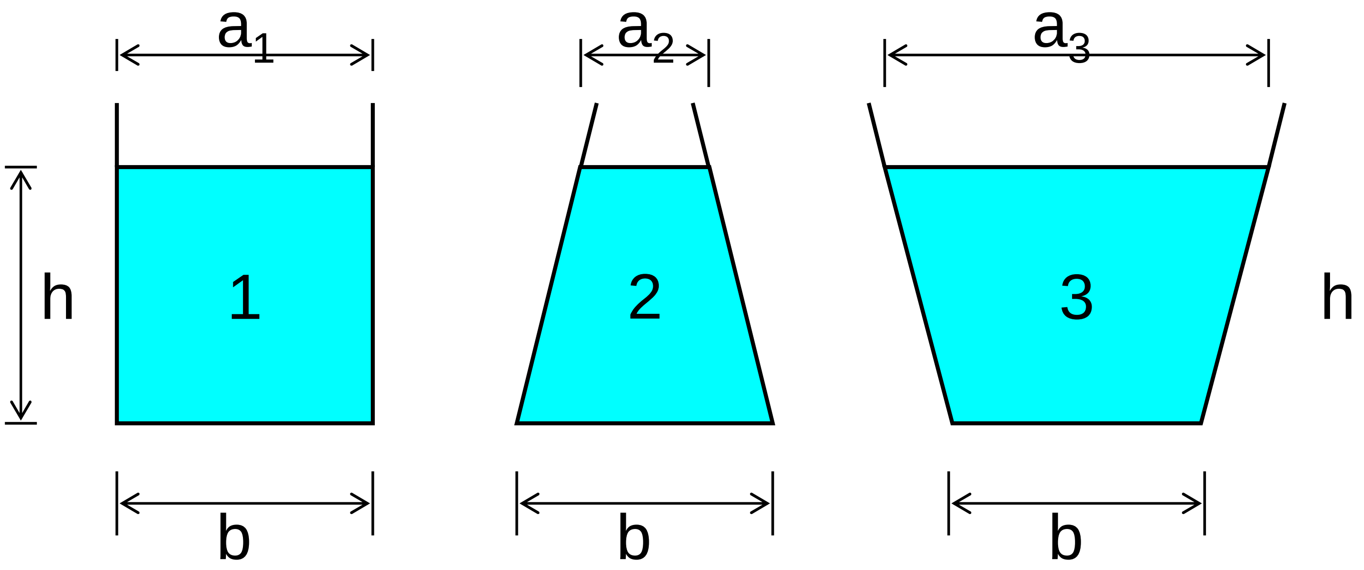


Die Druckspannung p wirkt stets *aus* der Flüssigkeit *senkrecht* auf das betrachtete Wandelement. Druckspannungsfiguren können an der Innenseite oder der Außenseite dargestellt werden.

© 2002 Büsching, F.: Hydromechanik



Aufgabe:
Druckspannungsverteilung an den Wänden des dargestellten Gefäßes.
Gegeben: $\gamma = 10 kN/m^3$

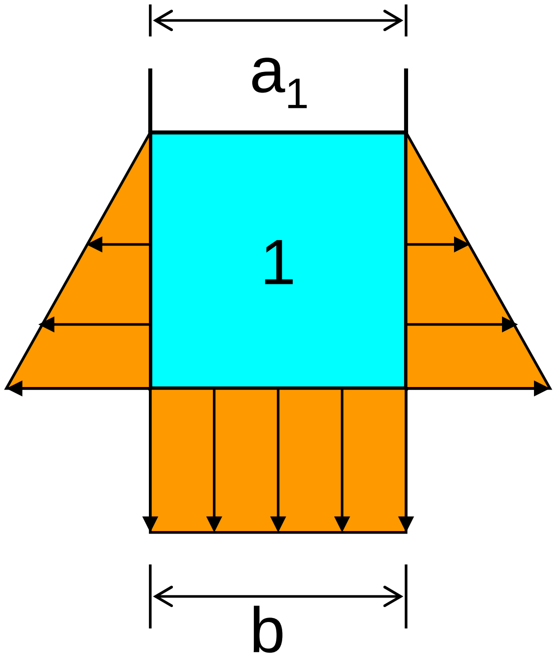


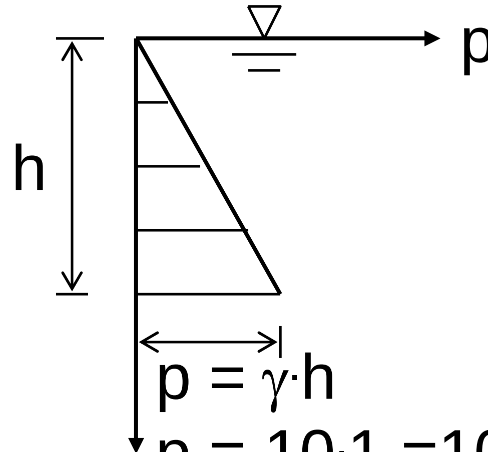
<u>Aufgabe:</u>

A. Berechnung und Darstellung der Druckspannungen an den Behälterwandungen.

B. Berechnung der *Gewichts<u>kräfte</u> der Flüssigkeiten* in den 3 symmetrischen Behältern.

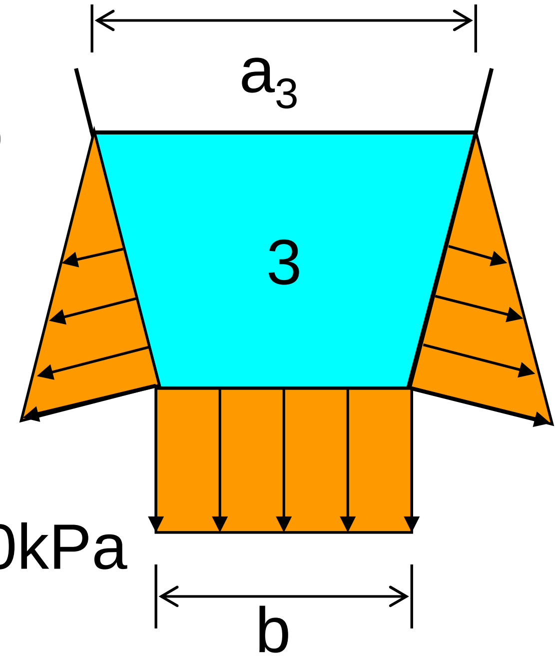
Gegeben: h = b = 1m; Spiegelbreiten a_1 = 1; a_2 = 0,5; a_3 = 1,5m; *senkrecht* zur Tafelebene s =1,0 m; γ = 10 kN/m^3.

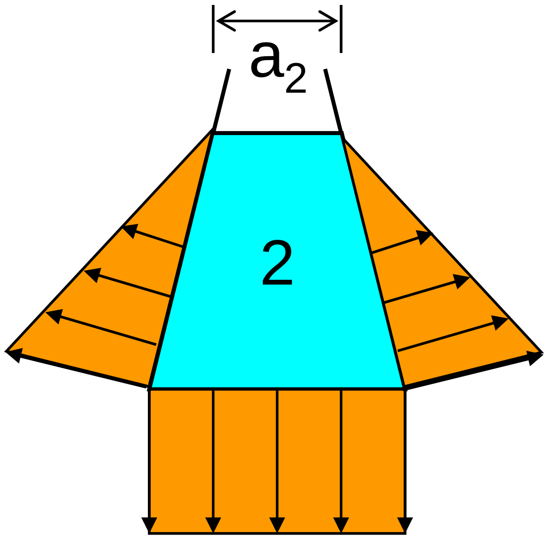




$$p = \gamma \cdot h$$

$$p = 10 \cdot 1 = 10 kPa$$





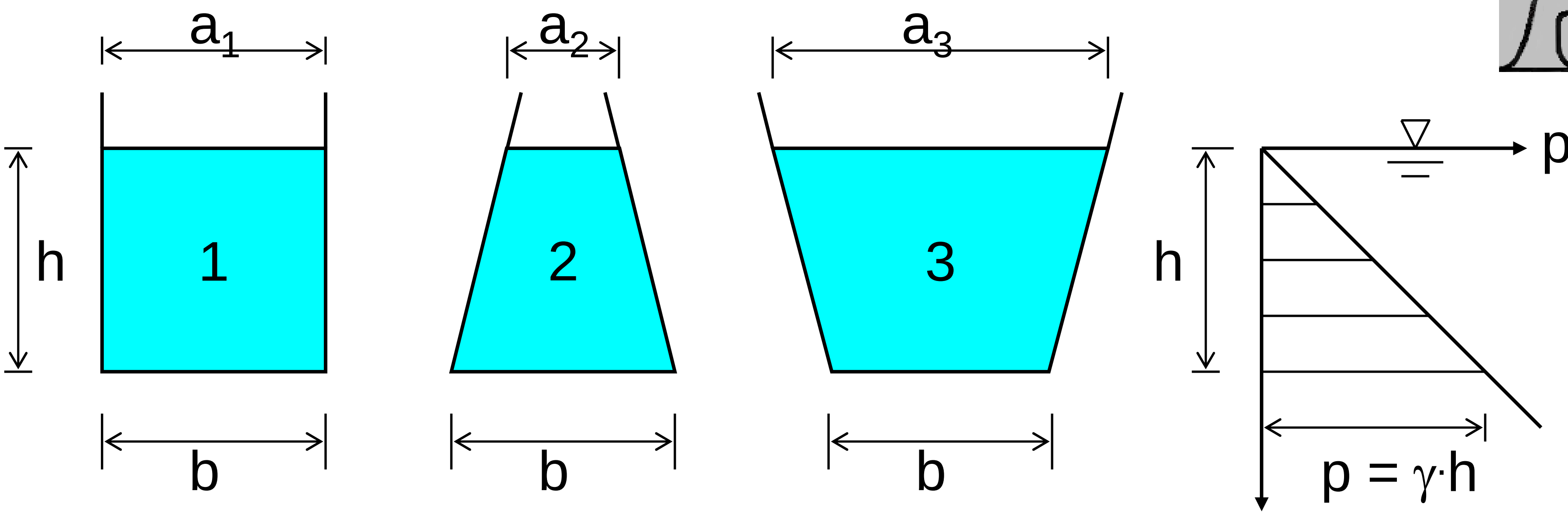
$$F_1 = V \cdot \gamma = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 = 10 kN$$

$$F_2 = F_1 - 2 \cdot \frac{0{,}25 \cdot 1}{2} \cdot 1 \cdot 10 = 7{,}5 kN$$

$$F_3 = F_1 + 2 \cdot \frac{0{,}25 \cdot 1}{2} \cdot 1 \cdot 10 = 12{,}5 kN$$

$$F_B = \gamma \cdot h \cdot b \cdot s = 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10 kN$$

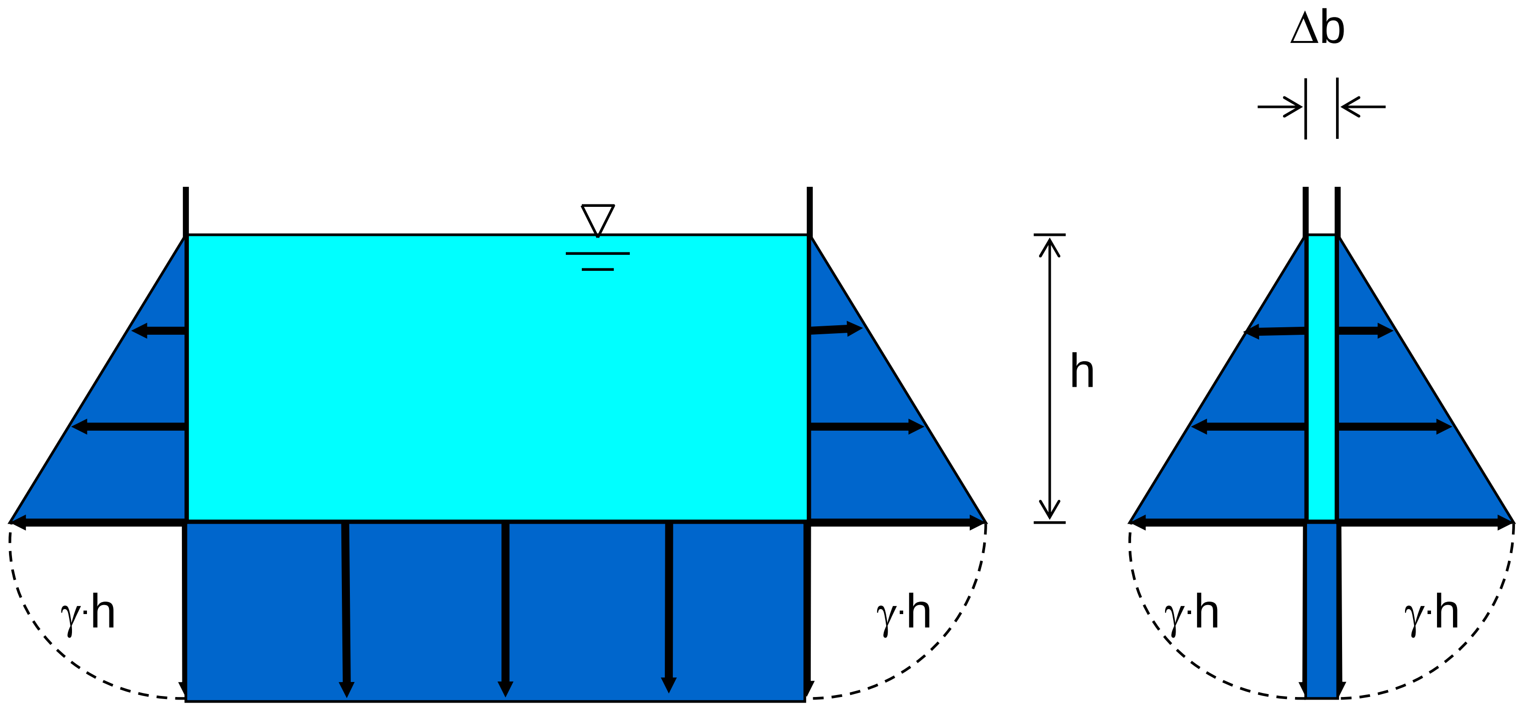
© 2002 Büsching, F.: Hydromechanik



Hydrostatisches Paradoxon:

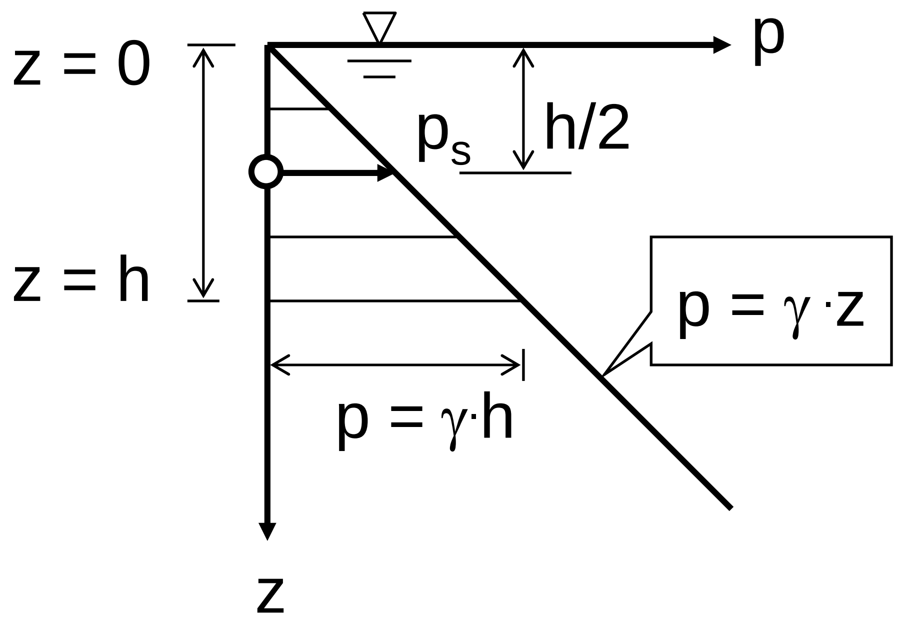
Die Druckspannung infolge der Flüssigkeit auf den Böden der Behälter ist in allen drei Fällen gleich ($p = \gamma \cdot h$) und ist von der Form der Behälter(wände) unabhängig. Wenn die Bodenflächen gleich sind, ergeben sich auch *gleiche Bodenkräfte* F_B (auch bei asymmetrischen Behältern). Weil die Seitenwände der Behälter 2 und 3 nicht vertikal sind, heben sich hier die auf die Seitenwände entfallenden *Kräfte* nicht vollständig auf. Im Behälter 2 (3) haben die Seitenwandkräfte auch eine nach oben (unten) gerichtete Komponente.

Druck auf ebene Wände



Unabhängig von der Breite (eines Behälters) ist die horizontale Druckverteilung gleich. Auch in engsten Fugen Δb und Klüften (Riss in der Bauwerksoberfläche) wirkt der *volle* Flüssigkeitsdruck.

Druckkräfte an vertikaler ebener Wand:



Die Integration der Druckspannungsverteilung p(z) in den Grenzen z = 0 (Spiegel) bis z = h liefert zunächst die resultierende *Linienlast [in kN/m]:*

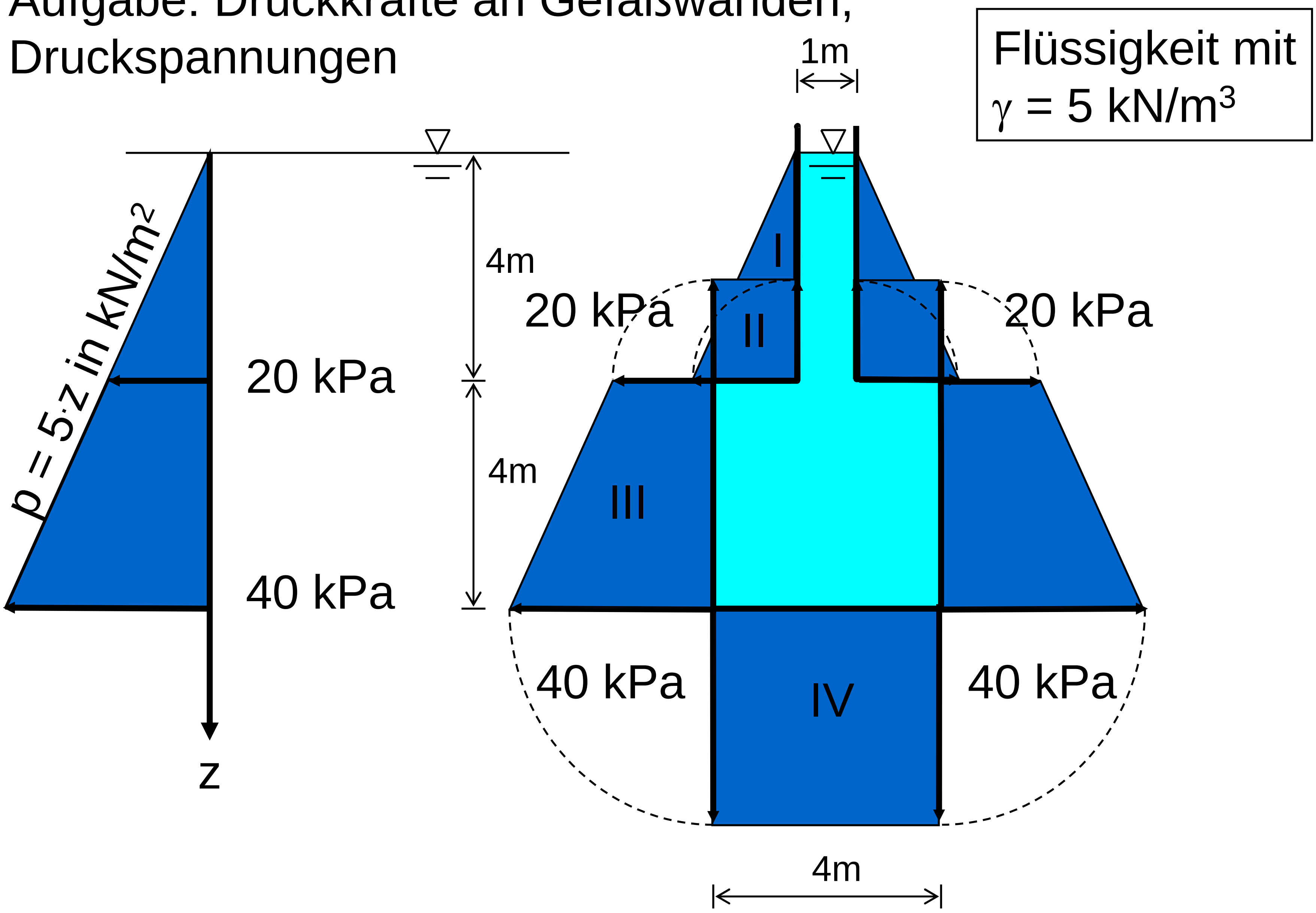
$$F_H = \int_0^h \gamma \cdot z \cdot dz$$

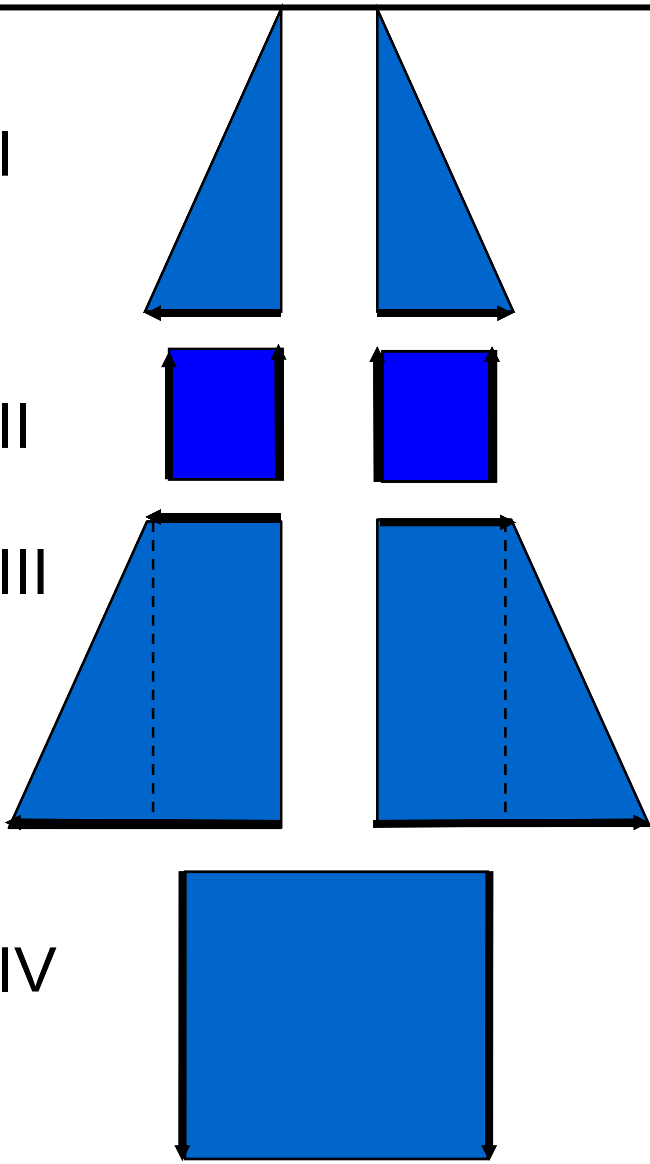
$$F_H = \left[\gamma \cdot \frac{z^2}{2}\right]_0^h = \gamma \cdot \frac{h^2}{2}$$

Dies ist in der Ebene die Fläche des sog. *Wasserdruckdreieckes*. Hieraus wird der *Betrag der resultierenden Kraft [in kN]* durch Multiplikation mit der Dimension senkrecht zur p-z-Ebene (z.B. Einheitsbreites =1(m)). In diesem Falle ist das Ergebnis zugleich:

$F_H = p_S \cdot A$ mit p_S = Druck am Schwerpunkt der gedrückten Fläche
und $A = h \cdot s$ = gedrückte Fläche.

Aufgabe: Druckkräfte an Gefäßwänden; Druckspannungen

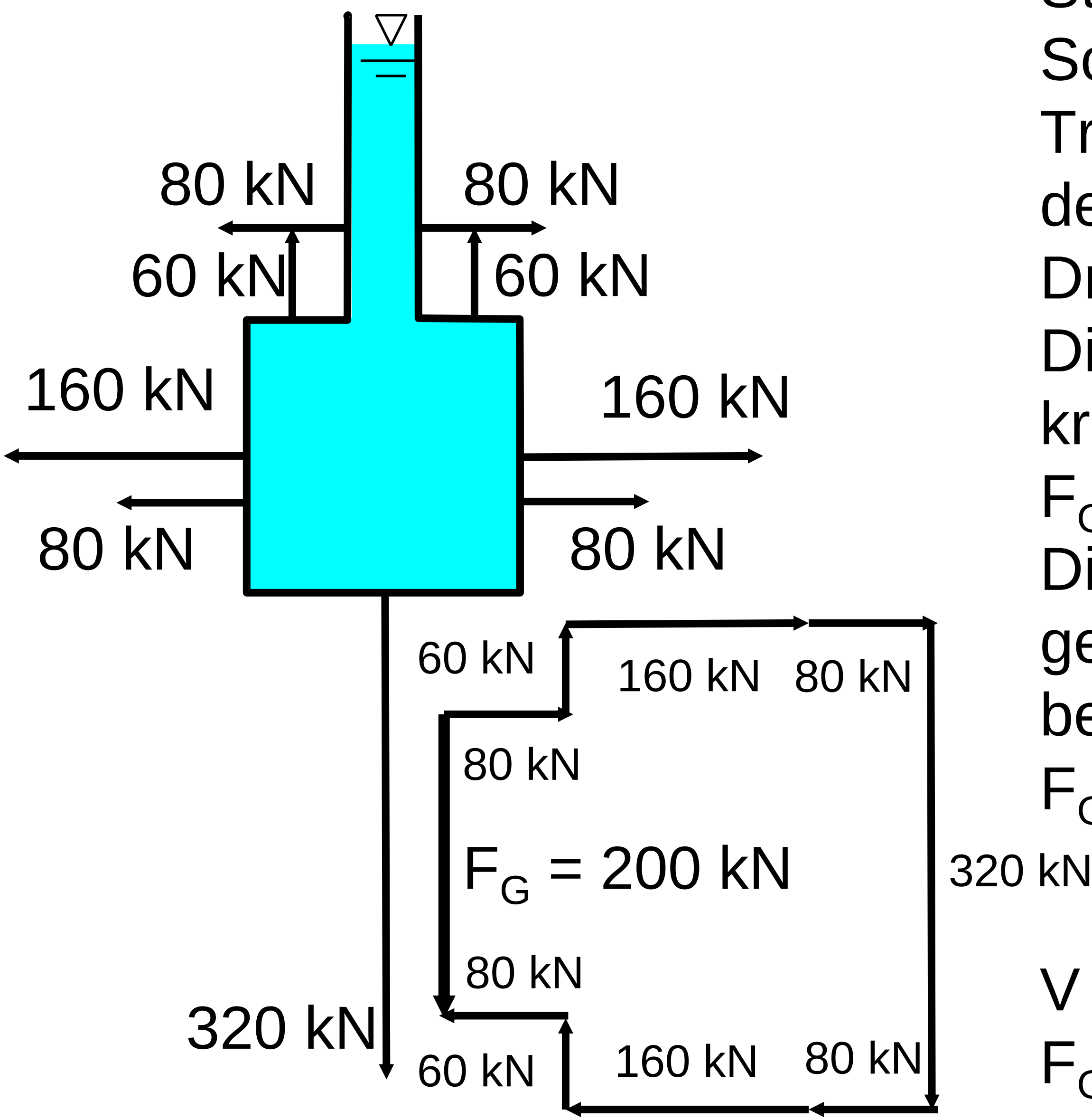




Druckfiguren	Linienlasten [kN/m]	Wandkräfte [kN]
		Belastungsbreite s = 2m
I	$2\,(20 \cdot 4/2) = 2 \cdot 40$	$2 \cdot 80$ $= 2 \cdot (10 \cdot 4 \cdot 2)$
II	$2\,(1{,}5 \cdot 20) = 2 \cdot 30$	$2 \cdot 60$ $= 2 \cdot (20 \cdot 1{,}5 \cdot 2)$
III	$2\,((20 + 40) \cdot 4/2)$ $= 2 \cdot 120$ oder: $2\,(4 \cdot 20 + 20 \cdot 4/2)$	$2 \cdot 240$ $= 2 \cdot (30 \cdot 4 \cdot 2)$
IV	$40 \cdot 4 = 160$	320 $= 40 \cdot 4 \cdot 2$

Kraftwirkungslinien verlaufen jeweils durch den Schwerpunkt der Druckspannungsfiguren.

Kräfte am System



Kräftepoligon

Statt der Ermittlung des Schwerpunktes eines Trapezes ist die Angabe derer von Rechteck und Dreieck einfacher.

Die Summe der Vertikal-kräfte ist

$F_G = 320 - 2 \cdot 60 = 200$kN.

Diese ist gleich der Eigen-gewichtskraft der im Gefäß befindlichen Flüssigkeit:

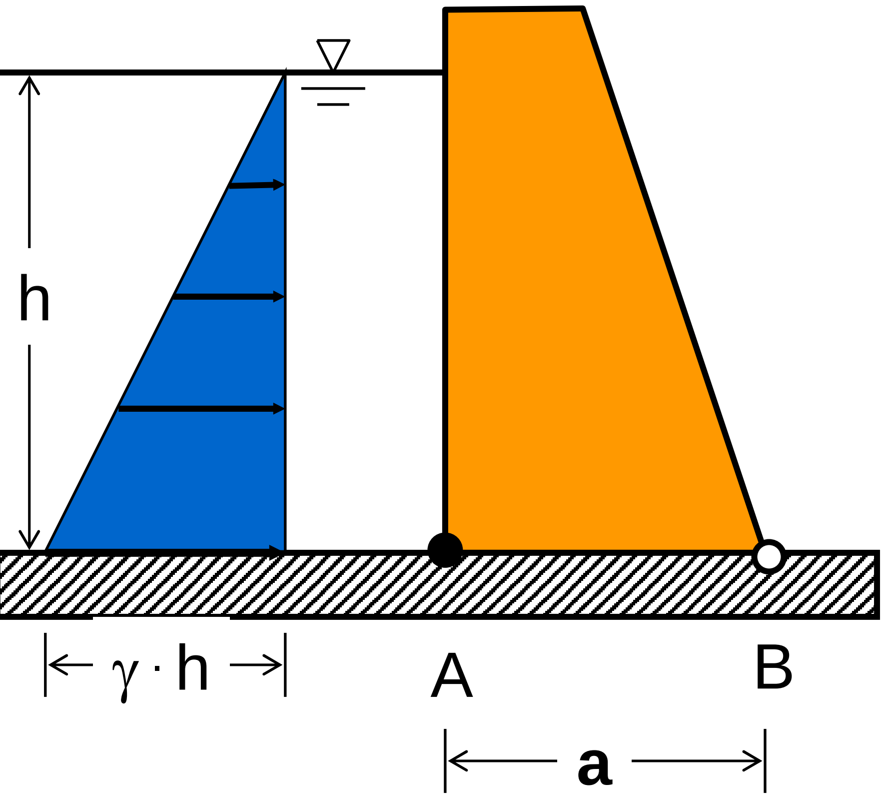
$F_G = \gamma \cdot V$.

$V = 4 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2 = 40\ m^3$

$F_G = 5 \cdot 40 = 200$ kN.

© 2002 Büsching, F.: Hydromechanik

Kippmoment einer Staumauer



Die Wirkungslinie der aus der Druckspannungsfigur resultierenden Kraft verläuft durch den Schwerpunkt der Druckspannungsfigur.

Dichtung bei Punkt A
Kippen um B

$$M = \gamma \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{h}{3} = \gamma \cdot \frac{h^3}{6}$$

Kraft · Hebelarm

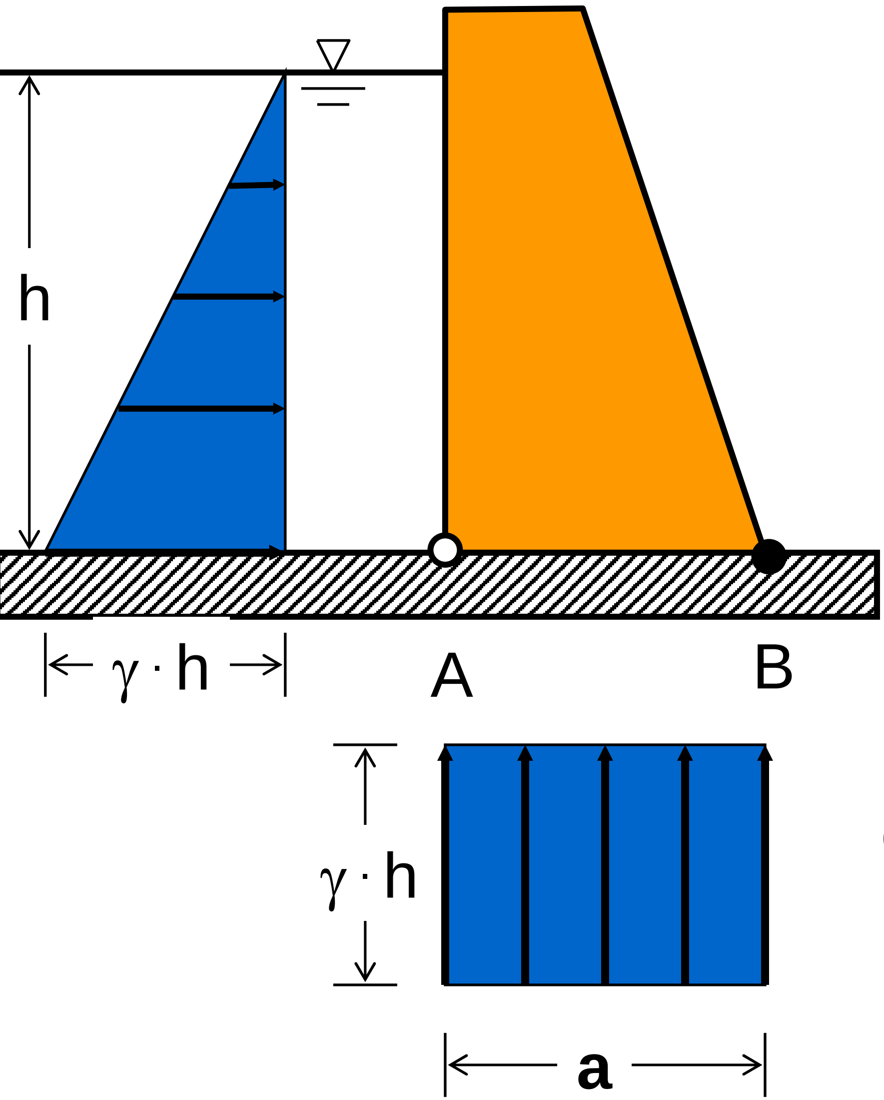
Untersickerung wird durch geeignete Gründungsmaßnahmen verhindert. Die Eigengewichtskraft des Bauwerkes erzeugt das dem Kippmoment entgegengesetzt gerichtete Standmoment M_{ST}.

Kippmoment einer Staumauer

Dichtung bei Punkt B.

Gründungsfuge mit Wasser gefüllt.

Kippen um Punkt B.



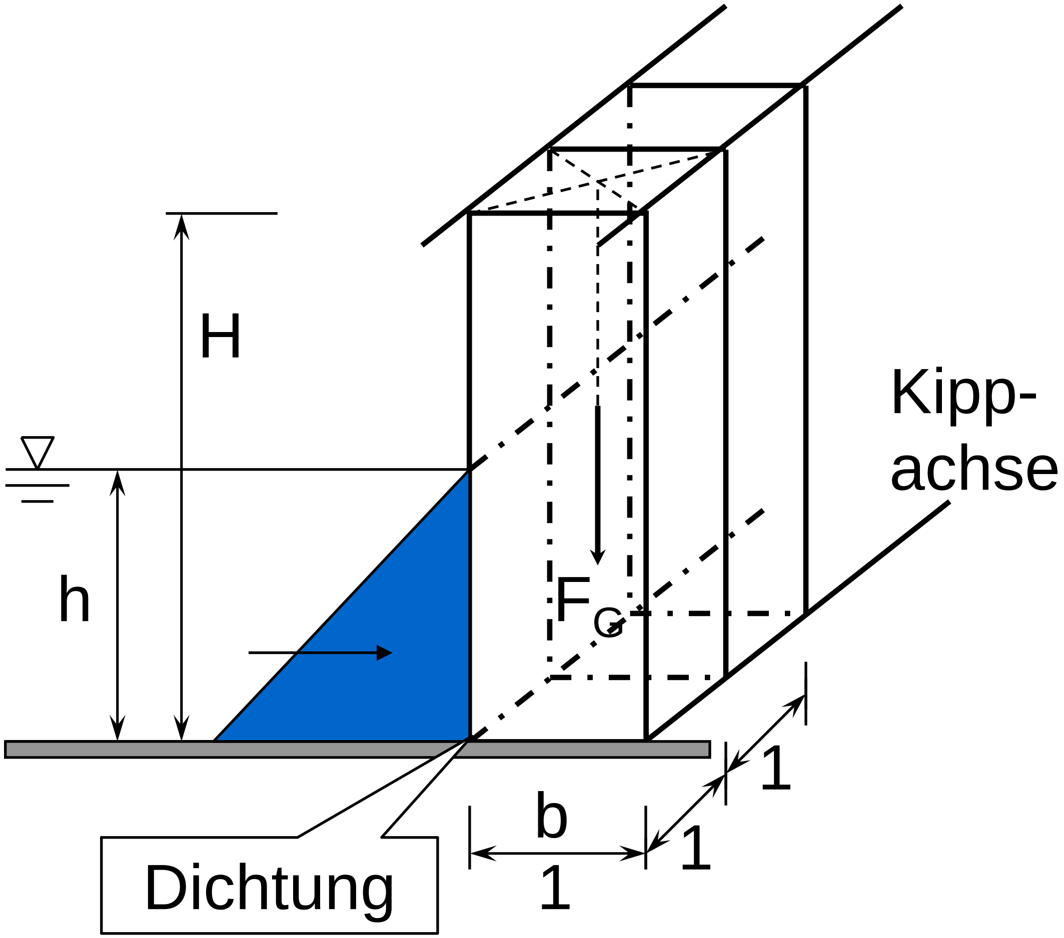
$$M = \gamma \cdot \frac{h^3}{6} + \gamma \cdot h \cdot a \cdot \frac{a}{2}$$

$$M = \gamma \cdot h \cdot \left(\frac{h^2}{6} + \frac{a^2}{2} \right)$$

In der ungedichteten Gründungsfuge wirkt die volle Druckspannung p = $\gamma \cdot$ h.

Das Standmoment M_{St} bleibt gleich.

Aufgabe: Ufermauer in Blockbauweise



gegeben:

Baustoff γ_B = 22 kN/m³

Wasser γ_W = 10 kN/m³

1. Auf welche Höhe h darf der Wasserstand maximal ansteigen, damit die Wand nicht umkippt ?
2. Ermittlung der erforderlichen Breite b, wenn h = H = 3m und die Kippsicherheit ν = 1,3 .
3. Um welchen Betrag erhöht sich das Kippmoment, wenn die Dichtung erst an der Kippachse vorhanden ist ?

1. Wirkende Kräfte pro lfdm Mauer (pro 1m-Block):

Die Wasserdruckkraft horizontal ist: $F_H = \gamma_W \cdot \frac{h^2}{2} = 5 \cdot h^2$ [kN/m]

Eigengewichtskraft der Wand: $F_G = \gamma_B \cdot V = 22 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 66{,}00\,\text{kN/m}$

Im *Gleichgewichtsfall* ist Standmoment M_{ST} = Kippmoment M_K.
(=Labiles Gleichgewicht)

Diese Aussage ist gleichbedeutend mit dem Quotienten:

$$\boxed{\nu = \frac{M_{st}}{M_K} = 1}$$

Eine Sicherheit, dass das Bauwerk nicht doch kippt, wenn eine kleinste zusätzliche Horizontalkraft auftritt, besteht *nicht !*

$$M_K = F_H \cdot h/3 = 5 \cdot h^3\ /3\ [\text{kNm/m}]$$

$$M_{ST} = F_G \cdot b/2 = 66 \cdot 0{,}5 = 33\,\text{kNm/m}$$

$$5 \cdot h^3 / 3 = 33 \ \rightarrow h = \sqrt[3]{99/5} = 2{,}7m$$ (= kritischer Wasserstand)

2. Ermittlung der erforderlichen Breite b, wenn h = H = 3m und die *Kippsicherheit* ν = 1,3. Eine *geforderte* Kippsicherheit ν = 1,3 bedeutet, dass der Betrag des Standmomentes zumindest das 1,3-fache des Kippmomentes ausmachen soll, d.h., mindestens 30% höher ist:

$$\boxed{M_{St} \geq 1{,}3 \cdot M_K}$$

$$F_G = \gamma_B \cdot V = 22 \cdot 3 \cdot 1 \cdot b = 66 \cdot b \longrightarrow M_{St} = 66 \cdot b \cdot \frac{b}{2}$$

$$F_H = 10 \cdot h^2 / 2 = 10 \cdot 3^2 / 2 = 45 kN$$

$$M_K = F_H \cdot h / 3 = 45 \cdot 3 / 3 = 45\, kNm$$

$$1{,}3 \cdot 45 \leq 33 \cdot b^2$$

$$b \geq \sqrt{\frac{1{,}3 \cdot 45}{33}} = 1{,}33\, m$$

3. Um welchen Betrag erhöht sich das Kippmoment, wenn die Dichtung erst an der Kippachse angeordnet ist ?

$$\Delta M_K = \gamma_W h \cdot b \cdot b/2 = 10 \cdot 3 \cdot 1{,}33^2/2 = 26{,}53\,kNm/m$$

$$\sum M_K = 45 + 26{,}53 = 71{,}5\,kNm/m$$

$$M_{St} = 33 \cdot 1{,}33^2 = 58{,}37\,kNm/m$$

$M_{St} < M_K$ Die Wand kippt um !

Anmerkung: Neben der *Kippsicherheit* ist auch die *Gleitsicherheit* nachzuweisen:

$$\boxed{\nu = \frac{F_R}{F_H}}$$

Je nach Versagenswahrscheinlichkeit des Bauwerkes wird für ν gefordert:

$$\boxed{1{,}3 \le \nu \le 1{,}5}$$

F_H = Summe aller horizontalen Wasserdruckkräfte

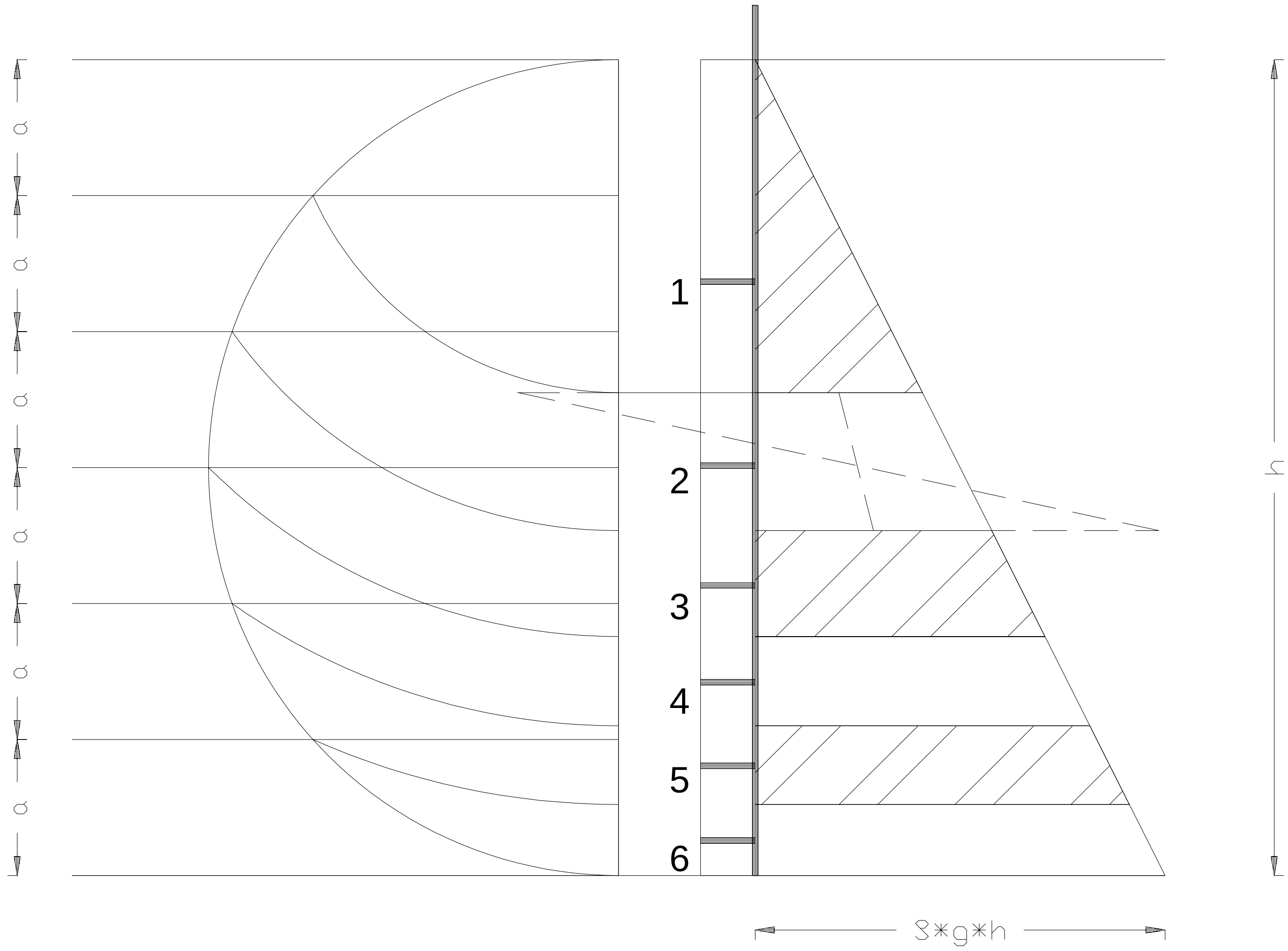
F_R = Reibkraft in der Fuge zwischen Bauwerk und Sohle = $\mu \cdot F_N$

F_N = Normalkraft aus Eigengewichtskraft und anderen ständigen Lasten (z.B. Auftriebskräfte --> Hafenmole)

μ = Reibbeiwert nach Coulomb

Anwendung: Riegellasten

Stauwandblech einer Planschütze



Gleiche Wasserlasten wirken auf 6 horizontalen Träger (Riegel)

Unterteilung einfacher Wasserlasten an vertikaler Wand

Bei Wasserbauwerken ist oft die einfachste hydrostatische Wasserdruckspannungsfigur - nämlich das sog. "Wasserdruckdreieck" - die für den Entwurf des Tragwerks maßgebliche, zumindest oft für einen maßgeblichen “Außergewöhnlichen Lastfall” (AL), vergl. DIN 19704. Dieser Lastfall liegt vor, wenn ein Verschluss nur einseitig belastet wird: beispielsweise ein Schleusentor, wenn eine Schleusenkammer vollständig entleert ist. Es muss in diesem Fall sichergestellt sein, dass die zwischen Massivbauwerk und Stahlkonstruktion befindliche Dichtung überall gleich funktionsfähig bleibt. Dies kann am ehesten gewährleistet werden, wenn die Formänderungen (*Durchbiegungen und Drehwinkel)* bei allen Hauptttragelementen gleiche Größenordnung haben.

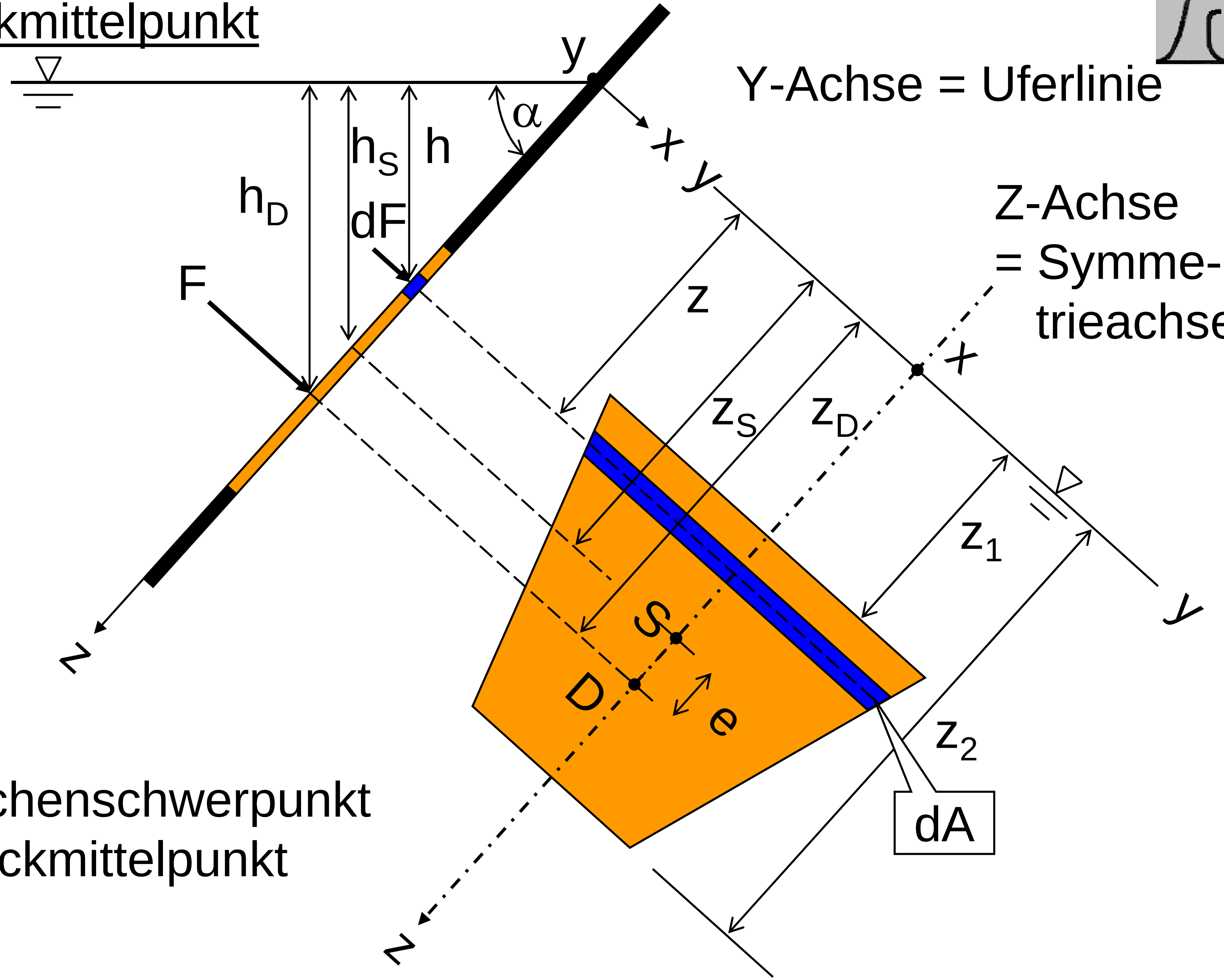
Wenn z.B. Haupttragelemente als (horizontale) *Riegel* aus Stahl ausgeführt sind, dann muss zur Erzielung gleicher Belastungen der Abstand zwischen den Riegeln mit zunehmender Tiefe unter dem Wasserspiegel abnehmen.

Kulka (1928) hat für eine Planschütze, die mit *n Riegeln* ausgesteift ist, das dargestellte graphische Verfahren für die Unterteilung der Wasserdruckspannungsfigur in n betragsmäßig gleiche Teilflächen angegeben:
Die Riegel werden jeweils auf der Höhe der Schwerpunkte der Teilflächen (ein Dreieck und n-1 Trapeze) angeordnet.

Konstruktion:

- Unterteilung der Wassertiefe h in n gleiche Abschnitte a. $h = n \cdot a$; Horizontale Linien mit Abstand a zeichnen.
- Halbkreis über der Wasserztiefe h.
- Kreise um den Schnittpunkt der Vertikalen (h) mit dem Wasserspiegel durch die Schnittpunkte des Halbkreises mit den Horizontalen liefern an der Vertikalen die betreffenden Grenzen der Teilflächen der Wasserdruckfigur.
- Zeichnerische Ermittlung der Schwerpunkte der Teilflächen.

1.05 Druckmittelpunkt



S = Flächenschwerpunkt

D = Druckmittelpunkt

Wasserdruckkraft an einer *symmetrischen Teilfläche* einer geneigten *ebenen* Wand.
Ermittlung des *Betrages* der Kraft und ihres *Angriffspunktes*.

Die z-Achse liegt in der um den Winkel α gegen die Horizontale (Wasserspiegel) geneigten Ebene.
Die Y-Achse ist die Uferlinie.

Abstände von der Uferlinie (in der y-z-Ebene): z, z_S, z_D.
Vertikale Abstände vom Wasserspiegel:

$h = z \cdot \sin\alpha$

$h_S = z_S \cdot \sin\alpha$

$h_D = z_D \cdot \sin\alpha$.

Schwerpunkt und Druckmittelpunkt liegen auf der Symmetrieachse = z-Achse. Da der Druck mit z zunimmt, liegt der Druckmittelpunkt D tiefer als der Schwerpunkt S.

Am Flächenelement (Lamelle) dA wirkt die Druckspannung

$$p = \gamma \cdot h = \gamma \cdot z \cdot \sin\alpha \tag{01}$$

(z liegt in der Ebene der gedrückten Fläche und dF ist dazu senkrecht)

Die auf das Flächenelement wirkende Kraft ist dann

$$\boxed{dF = \gamma \cdot z \cdot \sin\alpha \cdot dA} \tag{02}$$

Die Gesamtkraft F durch Integration ist:

$$F = \int_{z_1}^{z_2} dF = \int_{z_1}^{z_2} \gamma \cdot z \cdot \sin\alpha \cdot dA = \gamma \cdot \sin\alpha \int_{z_1}^{z_2} z \cdot dA \tag{03}$$

Darin ist $\int_{z_1}^{z_2} z \cdot dA = z_S \cdot A = M_y$ = statisches Moment um die y-Achse (04)

Demnach ist

$$F = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot M_y = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot z_S \cdot A \tag{05}$$

$$F = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot M_y = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot z_S \cdot A \qquad (05)$$

Darin ist $\sin\alpha \cdot z_S = h_S$ bzw. $z_S = \dfrac{h_S}{\sin\alpha}$ (s. o.) (06)

Mit dem Druck am Schwerpunkt $\gamma\ h_S = p_S$ wird wiederum

$$F = \gamma \cdot h_S \cdot A = p_S \cdot A \qquad (07)$$

Der *Betrag* der Wasserdruckkraft an der ebenen Wand ergibt sich aus der Multiplikation der gedrückten Fläche A mit der Druckspannung p_S an deren Schwerpunkt.

Der *Kraftangriffspunkt* folgt aus dem Satz vom statischen Moment. Bezüglich der y-Achse ist das *statische Moment* der Elementar-druckkraft

$$dM = dF \cdot z = \gamma \cdot z^2 \cdot \sin\alpha \cdot dA \qquad (08)$$

$$dM = dF \cdot z = \gamma \cdot z^2 \cdot \sin\alpha \cdot dA \qquad (08)$$

Das gesamte statische Moment wird aus der Integration erhalten:

$$M = \int_{z_1}^{z_2} \gamma \cdot \sin\alpha \cdot z^2 \cdot dA = \gamma \cdot \sin\alpha \int_{z_1}^{z_2} z^2 \cdot dA \qquad (09)$$

Darin ist $\int_{z_1}^{z_2} z^2 \cdot dA =$ I_y = Flächenmoment 2. Grades bezüglich der Wasserlinie (y-Achse) (10)

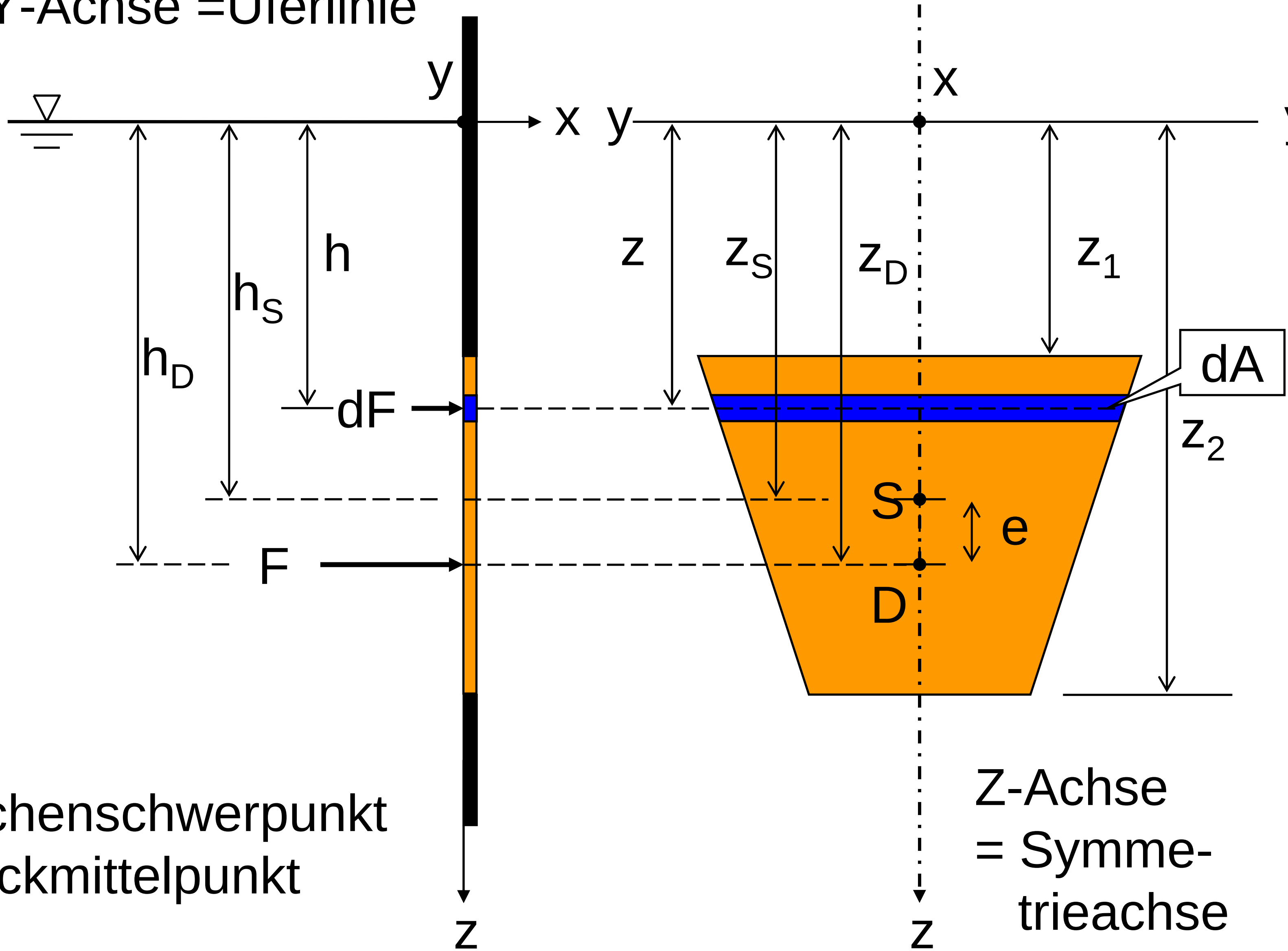
Demnach ist $M = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot I_y = F \cdot z_D$ (11)

Es folgt $z_D = \frac{M}{F} = \frac{\gamma \cdot \sin\alpha \cdot I_y}{\gamma \cdot \sin\alpha \cdot M_y} = \frac{I_y}{M_y}$ (12)

und weiter $z_D = \frac{I_y}{z_S \cdot A}$ unabhängig vom Neigungswinkel α. (13)

An einer *vertikalen* Wand ist $z_S = h_S$ und es wird $z_D = \frac{I_y}{h_S \cdot A} = h_D$ (14)

Y-Achse =Uferlinie



S = Flächenschwerpunkt
D = Druckmittelpunkt

Z-Achse
= Symme-
trieachse

Nach dem *Steiner`schen Satz* ist mit I_S (bezogen auf die spiegelparallele Hauptachse der betrachteten Fläche A):

$$I_y = I_S + A \cdot z_S^2 \tag{15}$$

Eingesetzt in (13)

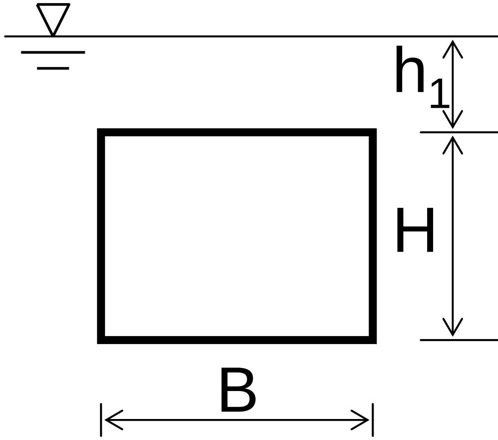
$$z_D = \frac{I_S + A \cdot z_S^2}{A \cdot z_S} = \frac{I_S}{A \cdot z_S} + z_S \tag{16}$$

Der Abstand zwischen Schwerpunkt und Druckmittelpunkt ist e

$$e = z_D - z_S = \frac{I_S}{A \cdot z_S} \quad \text{bzw.} \qquad e = \frac{I_S \cdot \sin\alpha}{A \cdot h_S} \tag{17}$$

Beispiel: Rechteckfenster in ebener Wand (allgemein)

gegeben: Höhe H, Breite B, Entfernung der Oberkante vom Wasserspiegel h_1, Neigungswinkel α.



$$A = B \cdot H \qquad F = p_S \cdot A = \gamma \left(h_1 + H/2\right) \cdot B \cdot H$$

$$I_S = \frac{B \cdot H^3}{12} \qquad z_S = h_S = h_1 + \frac{H}{2}$$

$$e = \frac{B \cdot H^3 \cdot \sin\alpha}{12 \cdot B \cdot H \cdot (h_1 + H/2)} = \frac{H^2 \cdot \sin\alpha}{12 \cdot (h_1 + H/2)}$$

Überprüfen Sie das Ergebnis für $h_1 = 0$. Setzen Sie auch verschiedene Werte α ein.

<u>Rechteckfenster:</u>

a). gegeben: $\gamma = 10$ kN/m³, $\alpha = 90^o$, $h_1 = 0$m, H = 2m, B = 2m.
Ergebnisse: e = 1/3 = 0,333m, F = 40 kN.

b). gegeben: $\gamma = 10$ kN/m³, $\alpha = 30^o$, $h_1 = 1$m, H = 2m, B = 2m.
Ergebnisse: e = 1/3 = 0,333m, F = 20 kN.

Rechteckfenster:

c). gegeben: $\gamma = 10\ kN/m^3$, $\alpha = 90^o$, $h_1 = 1m$, $H = 2m$, $B = 2m$.
Ergebnisse: $e = 1/6 = 0{,}167m$, $F = 80\ kN$.

d). gegeben: $\gamma = 10\ kN/m^3$, $\alpha = 30^o$, $h_1 = 1m$, $H = 2m$, $B = 2m$.
Ergebnisse: $e = 1/9 = 0{,}111m$, $F = 60\ kN$.

Dreieckfenster:

a). gegeben: $\gamma = 10\ kN/m^3$, $\alpha = 90^o$, $h_1 = 1m$ (B), $H = 2m$, $B = 2m$.
Ergebnisse: $e = 0{,}134m$, $F = 33{,}32\ kN$.

b). gegeben: $\gamma = 10\ kN/m^3$, $\alpha = 90^o$, $h_1 = 1m$, $H = 2m$, $B = 2m$.
Ergebnisse: e =   , F =   .

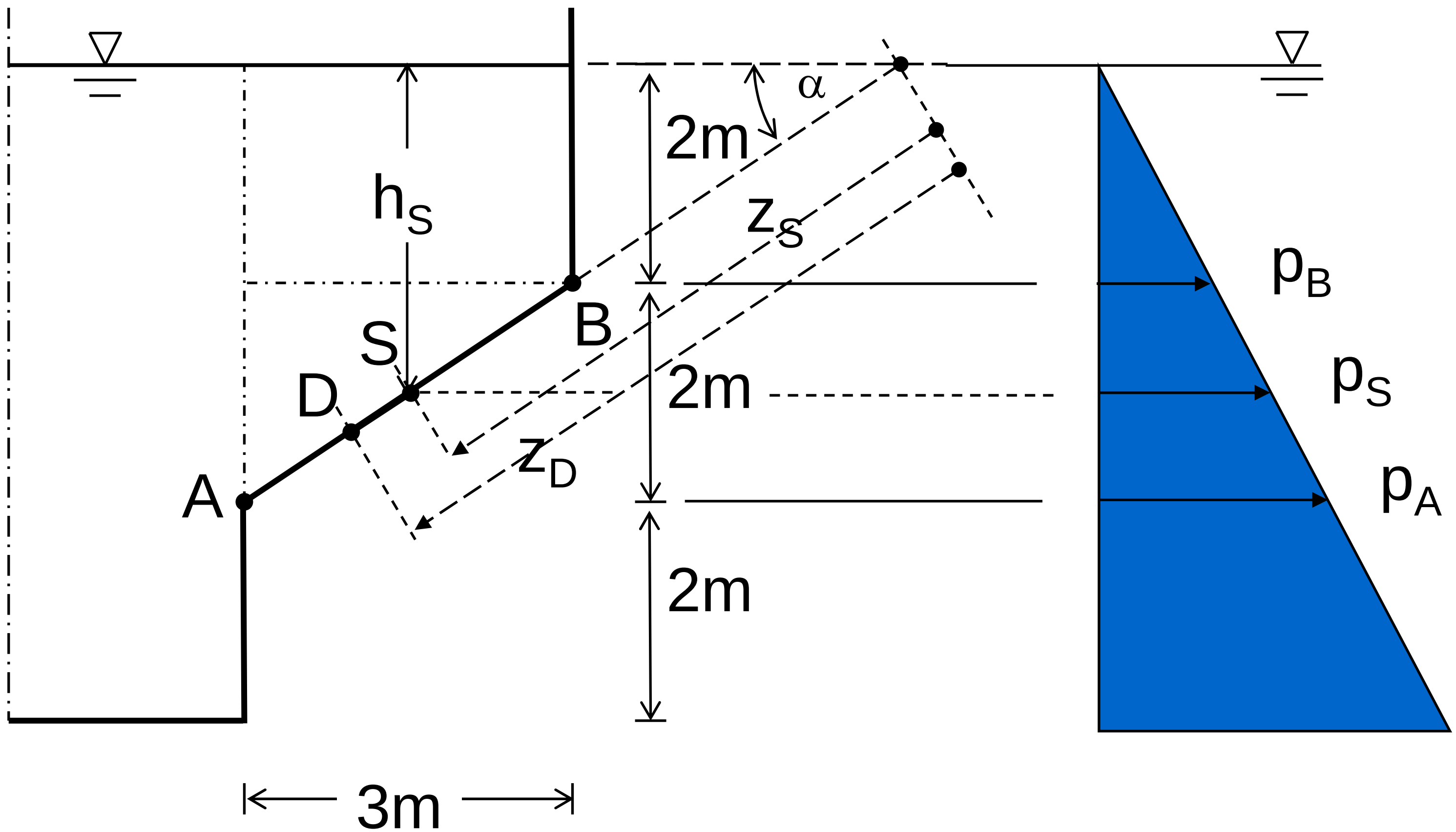
Kreisfenster:

a). gegeben: $\gamma = 10\ kN/m^3$, $\alpha = 90^o$, $h_1 = R = 1m$.
Ergebnisse: $e = R/8$, $F = 20 \cdot \pi \cdot R^3\ kN$.

Aufgabe: Berechnung der *Wasserdruckkraft F* und deren *Angriffspunkt D* an der geneigten Teilfläche A - B.

Gegeben: Einheitsbreite s = 1m senkrecht zur Tafel.

$\gamma = 10 kN/m^3$



$$A = 1 \cdot \sqrt{3^2 + 2^2} = 3{,}605 m^2 \qquad I_S = \frac{1 \cdot 3{,}605^3}{12} = 3{,}904 m^4$$

$$h_S = 3m$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{3{,}605} = 0{,}554 \qquad \tan\alpha = \frac{2}{3} \qquad \alpha = 33{,}69$$

$$z_S = \frac{h_S}{\sin\alpha} = \frac{3}{0{,}554} = 5{,}415 m$$

$$z_D = \frac{I_S}{z_S \cdot A} + z_S = \frac{3{,}904}{5{,}415 \cdot 3{,}605} + 5{,}415 = 5{,}615 m$$

$$h_D = z_{D\cdot} \cdot \sin\alpha = 5{,}615 \cdot 0{,}554 = 3{,}111 m$$

$$e = \frac{I_S \cdot \sin\alpha}{A \cdot h_S} = \frac{3{,}904 \cdot 0{,}554}{3{,}605 \cdot 3} = 0{,}200 m$$

$$F = p_S \cdot A = 10 \cdot 3 \cdot 3{,}605 = 108{,}15 kN$$

Der Betrag der Kraft F kann auch aus der direkt wirkenden Druckspannungsfigur oder aus 2 Komponenten ermittelt werden.