Kinematik der elliptischen Bewegung als Resultat der Überlagerung zweier konzentrischer gegenläufiger Kreisbewegungen

von Fritz Büsching
(http://orcid.orc/0000-002-6673-8273)

Problemstellung und Zusammenfassung

Die bei Wasserwellen auftretende Veränderung der Orbitalbewegung (von etwa kreisförmiger im Tiefwasser zu zunehmend elliptischer bei abnehmender Wassertiefe) wird - abweichend von der konservativen Betrachtungsweise des sogenannten Shoaling-Prozesses – *a priori* auf ein Reflexionsphänomen zurückgeführt.
Dabei wachsen die langen Hauptachsen der Ellipse auf Kosten der kurzen Hauptachsen.
Für Tiefwasserbedingungen ($d/L \geq 0{,}5$) wird nach der verwendeten Theorie ERR des Autors [1] beispielsweise an der Wasseroberfläche die zirkulare Kreisbewegung des Durchmessers D_1 (= Wellenhöhe H) mit derjenigen eines kleineren Kreisdurchmesser D_2 überlagert.
Dabei gilt die bekannte Beziehung

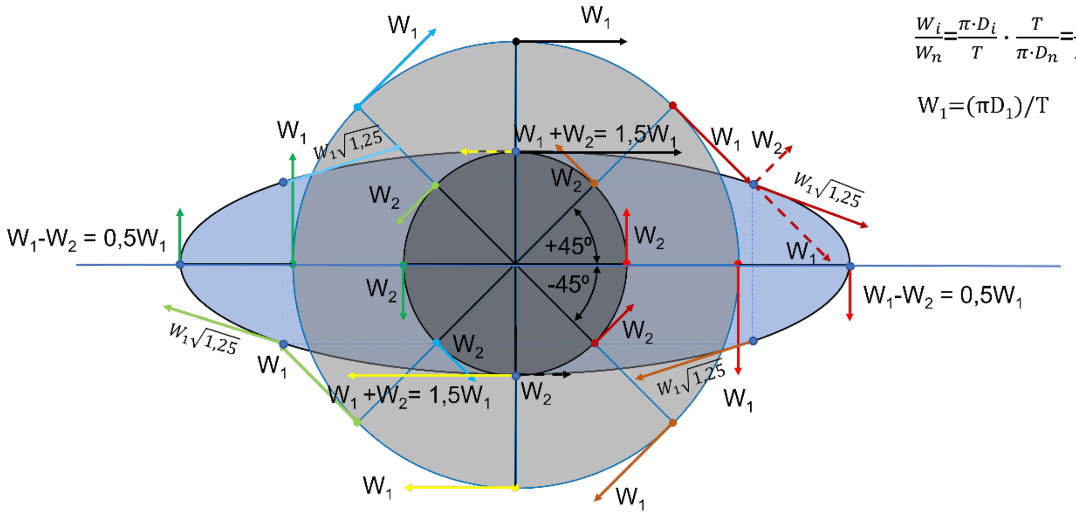
$$D_2 = D_1 \cdot e^{-2\pi d/L}$$

mit d/L als Verhältnis der Wassertiefe zur Wellenlänge.

Dem Phänomen der exponentiell reduzierten Reflexion (ERR) wird dadurch Rechnung getragen, dass dieses sich auf eine Wassertiefe $d < L/2$ bezieht, in der eine Spiegelung (= Reflexion) angenommen wird und dementsprechend eine Umkehr des Drehsinnes der zu überlagernden Orbitalbewegung erfolgt.
Im Falle einer vorgegebenen Wassertiefe (Spiegeltiefe) $d_2 < L/2$ wäre der an der Wasseroberfläche vorhandenen zirkularen Orbitalbewegung des Durchmessers D_1 die Orbitalbewegung des Durchmessers D_2 zu überlagern, die sich nach dem o.a. Exponentialgesetz in der doppelten Entfernung $2d_2$ vom Wasserspiegel ergibt.
Die vorliegende Theorie wird einerseits an einem Beispiel der Berechnung der Kinematik für Wasserwellen hinsichtlich der Bemessung von Offshore-Bauwerken [3] überprüft und andererseits dem Beispiel des Umlaufes der Erde um die Sonne den Ergebnissen der bekannten Epizykeltheorie an die Seite gestellt. Dabei wurden die Datenangaben für die Beschreibung der Erdbahn aus Wikipedia, (Lemma „Erdbahn“), verwendet

1. Einleitung

Bekanntlich kann nach der aus der Astrologie bekannten Epizykeltheorie die Bahn einer Ellipse aus zwei Kreisbewegungen zusammengesetzt werden, wenn diese entgegengesetzte Umlaufrichtungen und gleiche Winkelgeschwindigkeiten ω aufweisen. Dabei bewegt sich der kleinere Kreis mit seinem Mittelpunkt auf dem Umfang des größeren Kreises. Derartig beschriebene Ellipsen liegen auch den Ergebnissen von Kepler bezüglich seiner Sätze zur Planeten- und Satellitenbewegungen zugrunde.
Die hier dargestellte Methode des Autors für die Beschreibung der elliptischen Bewegung basiert ebenfalls auf der Verwendung zweier Kreisbewegungen mit Durchmessern $D_2 \leq D_1$, gleichen Winkelgeschwindigkeiten ω und entgegengesetztem Umlaufsinn.
Es handelt sich jedoch um konzentrische Kreisbewegungen, von denen die Umfangsgeschwindigkeit des kleineren Kreises als reduziert gespiegeltes Abbild der Umfangsgeschwindigkeit des größeren Kreises verwendet wird. In diesem Fall liegen zwei Orbitalbewegungen mit unterschiedlichem Drehsinn vor, deren Umfangsgeschwindigkeiten vektoriell addiert die Tangentenvektoren einer Ellipse ergeben, vergl.Abb.1.



$\frac{W_i}{W_n} = \frac{\pi \cdot D_i}{T} \cdot \frac{T}{\pi \cdot D_n} = \frac{D_i}{D_n}$ n ≠ i

$W_1 = (\pi D_1)/T$ $W_1 = 2W_2$

Abb.1: Prinzipielle Darstellung einer Ellipse in Normallage. Ihre Gestalt ergibt sich als Gesamtheit der Berührungspunkte ihrer Tangenten. Letztere werden aus der Addition der zueinander gehörigen Kreisumfangsgeschwindigkeitsvektoren der Kreise mit den Durchmessern D_1 und D_2 erhalten.

Die Gestalt der gesuchten Ellipse ergibt sich als Gesamtheit der Berührungspunkte ihrer Tangentenvektoren. Letztere werden aus der Addition der zueinander gehörigen Kreisumfangsgeschwindigkeitsvektoren W_1 und W_2 erhalten, deren Verhältnis ihrer Beträge sich im Beispiel der Abb.1 aus $W_1 = 2W_2$ ergibt.

In diesem Fall wird von jeweils 8 auf dem betreffenden Kreisumfang gleichmäßig verteilten Stützpunkten der Tangentenvektoren ausgegangen. Die jeweils mit gleichen Farben gekennzeichneten Umfangs-Geschwindigkeitsvektoren W_1 und W_2 werden entweder durch exakte rechnerische Vektoraddition oder vorzugsweise hinreichend genaue graphische Vektoraddition ermittelt. Beispielhaft ist letztere für die an der Horizontalen gespiegelten Positionen (dunkelrot) mit den Winkelabweichungen von der Horizontalen plus bzw. minus 45^0 dargestellt. In diesem Fall ist hierfür der Betrag der resultieren örtlichen Orbitalgeschwindigkeit der Ellipse $W = W_1\sqrt{1{,}25}$.

- Im Sonderfall, dass es sich um Bewegungen mit gleichen Durchmessern $D_1 = D_2$ handelt und damit auch deren Umfangsgeschwindigkeiten gleiche Beträge haben, resultiert eine linear polarisierte Schwingung durch den Kreismittelpunkt mit maximalen Auslenkungen $D = 2D_1 = 2D_2$ und maximalen Geschwindigkeitsbeträgen $W = 2W_1 = 2W_2$.
- Andererseits liegt im Falle $D_2 = 0$ die Bewegung auf dem Kreis mit dem Durchmesser D_1 vor.

Tatsächlich wird mit der hier dargestellten Methode die gleiche Ellipse erhalten wie diese durch die Epizykeltheorie geliefert wird. Die Rückführung der elliptischen Bewegung auf 2 konzentrische Kreisbewegungen mit unterschiedlichem Drehsinn bietet indessen die einfachere graphische Darstellung und physikalisch verständlichere Ableitung der Parameter.

2. Anwendung auf die Orbitalbewegung einer Wasserwelle an der Wasseroberfläche über begrenzter Wassertiefe d = 35m.

Als zweites Beispiel wird Bezug genommen auf die Orbitalbewegung einer Bemessungswelle für ein wellenbelastetes Pfahlbauwerk, das in einer Wassertiefe d=35m steht, vergl. [3].
Dabei waren die folgenden Eingangsdaten für Tiefwasser mit Wassertiefen $d \geq L/2$ als bekannt angenommen:

- Die Wellenperiode $T = 1/f = 15{,}1$s als gleichbedeutend mit der Kreisperiode der Orbitalbewegungen
- Die Wellenhöhe $H_{max} = 30$m gleich dem Orbitalkreisdurchmesser $D_1 = 30$m an der Wasseroberfläche und
- der Orbitalkreisdurchmesser $D_2 = 5{,}17$m, der nach der vorliegenden Theorie in der 2-fachen lokalen Wassertiefe $d = 2 \cdot 35\text{m} = 70$m vorhanden ist.

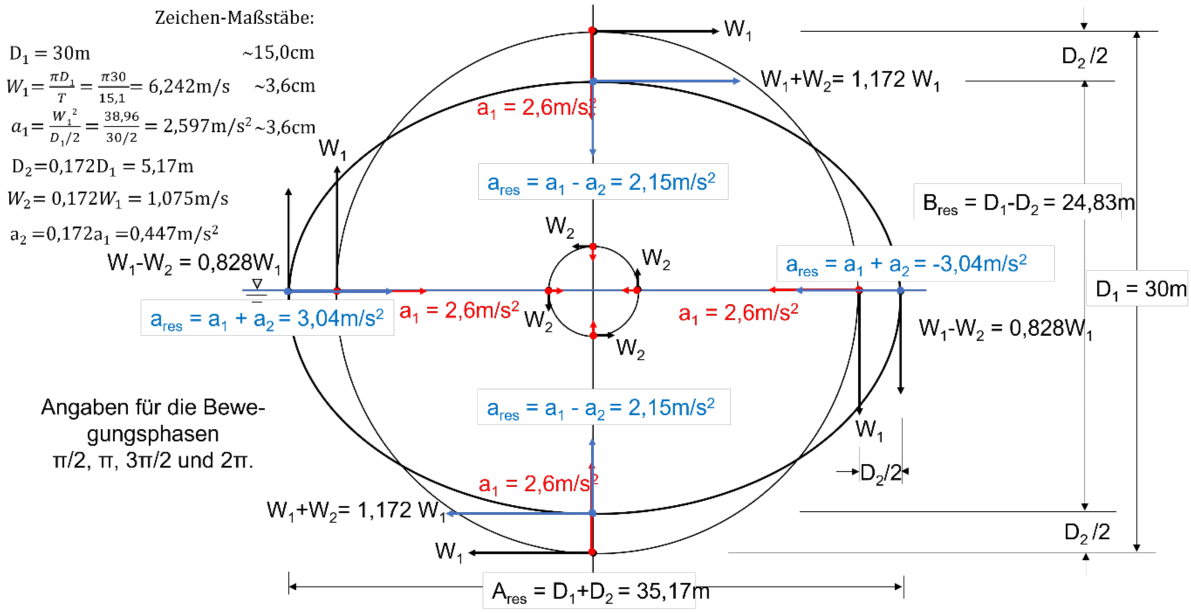


Abb.2: Graphische Ermittlung der elliptischen Orbitalbahnen in der Normallage mit horizontaler Hauptachse. Vektoraddition für das Verhältnis D_1/D_2 = 30m/5,17m = 5,8/1. Dasselbe Verhältnis gilt auch für die Beträge der Umfangsgeschwindigkeiten $W_1 = 5,8W_2$ und der Umfangsbeschleunigungen $a_1 = 5,8a_2$.

Im dargestellten Beispiel der Abb.2 ist es ausreichend nur auf die 4 Phasenpunkte π/2, π, $3\frac{\pi}{2}$ und 2π Bezug zu nehmen, die für die Ermittlung der unten nachfolgen Ergebnisdaten bestimmend sind. Mit dem Verfahren wird nicht nur die Gestalt der Ellipse ermittelt, sondern für jeden (beliebigen) Ellipsenpunkt auch dessen Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor nach Betrag und Richtung.

Zur Darstellung der elliptischen Orbitalbahn sind nur die beiden Kreisdurchmesser erforderlich:

$$D_1 = 30m \text{ und } D_2 = 5,17m.$$

Die Längen der Ellipsen-Hauptachsen ergeben sich daraus zu:

Horizontal: $A = 2a = D_1 + D_2 = 30 + 5,17m = 35,17m$ (1)

Vertikal: $B = 2b = D_1 - D_2 = 30 - 5,17m = 24,83m$ (2)

Wird die Normallage der Ellipse vorausgesetzt ist a die horizontale lange Halbachse und b senkrecht dazu die kürzere Halbachse.

Zur Unterscheidung von der unten verwendeten Bezeichnung für die Orbitalbeschleunigung wird letztere als a mit tiefgestellter Indexzahl angegeben.

Mit der Kenntnis der Länge der Halbachsen kann die Ellipse mithilfe eines Zeichenprogrammes bereits hinreichend genau gezeichnet werden.

Analog zu der Ermittlung der Abmessungen der Ellipse aus den Kreisdurchmessern werden auch die Orbitalgeschwindigkeiten W und Orbitalbeschleunigungen a aus den betreffenden Formeln für die beiden Kreisbewegungen erhalten. Die nachfolgenden Betragsverhältniszahlen wurden anhand der betreffenden Vektoradditionen bzw. Vergleichsrechnungen bestätigt.

$$D_2 = 0{,}172 D_1 \qquad W_2 = 0{,}172 W_1 \qquad a_2 = 0{,}172 a_1 \tag{3}$$

Damit und mit der vorgewählte Umlaufperiode T = 15,1 s lauten diese:

$$W_1 = \frac{\pi D_1}{T} = \frac{\pi 30}{15{,}1} = 6{,}242 \mathrm{m/s} \quad \text{und} \quad W_2 = 0{,}172 W_1 = 1{,}075 \mathrm{m/s} \tag{4}$$

$$a_1 = \frac{W_1^{\ 2}}{D_1/2} = \frac{38{,}96}{30/2} = 2{,}597 \mathrm{m/s}^2 \quad \text{und} \quad a_2 = 0{,}172 a_1 = 0{,}447 \mathrm{m/s}^2 \tag{5}$$

Die Beträge der resultierenden Orbitalgeschwindigkeitsvektoren W der Ellipse ergeben sich an den Enden der kurzen Achsen als Maxima aus der Addition der beteiligten zirkularen Umfangsgeschwindigkeiten zu

horizontal maximal: $$W_{res} = W_1 + W_2 = 1{,}172 W_1 = 7{,}316 \mathrm{m/s} \tag{6}$$

und an den Enden der langen Achsen als Minima aus deren Differenz

vertikal minimal: $$W_{res} = W_1 - W_2 = 0{,}828 W_1 = 5{,}168 \mathrm{m/s} \tag{7}$$

Die Maxima der Beschleunigungsbeträge a infolge der ermittelten Orbitalgeschwindigkeiten ergeben sich parallel zu den langen Achsen als Maxima zu

$$a_{res} = a_1 + a_2 = \pm 3{,}04 \mathrm{m/s}^2 \tag{8}$$

und als Minima senkrecht zu

$$a_{res} = a_1 - a_2 = \pm 2{,}15 \mathrm{m/s}^2. \tag{9}$$

Die obigen Resultate der Formeln (6) bis (9) befinden sind mit den Ergebnissen unter Verwendung der linearen Wellentheorie nach Airy-Laplace (1842) bzw. mit der vom Autor unter Erfüllung des Satzes von der Erhaltung der Masse verbesserten Linearen Wellentheorie der „exponentiell reduzierten Reflexion“ (ERR) in Übereinstimmung [2].

3. Ableitung der Durchmesser D_1 und D_2 zweier konzentrischer Kreisbewegungen aus den bekannten Längen der Halbachsen der elliptischen Erdbahn (Kepler-Ellipse) und deren Umlaufperiode T.

Nachfolgend wird die vorliegende Theorie am Beispiel des Umlaufes der Erde um die Sonne den Ergebnissen der bekannten Epizykeltheorie an die Seite gestellt. Dabei werden die Datenangaben für die Beschreibung der Erdbahn aus Wikipedia, (Lemma „Erdbahn“), verwendet.

Nach der vorliegenden Theorie werden aus den gegebenen Längen der Ellipsenhauptachsen der Erdbahn die Durchmesser D_1 und D_2 der konzentrischen Bewegungen berechnet.
Aus dem Gleichungspaar (1) und (2) ergibt sich das Gleichungspaar (10) und (11)

$$D_1 = B + D_2 = 2b + (a-b) = a+b \qquad (10)$$

$$D_2 = (A-B)/2 = (2a - 2b)/2 = a-b \qquad (11)$$

Während die Länge a der langen Erdbahnellipsen-Halbachse der Wikipedia direkt zu etwa

$$a = 149{,}598 \cdot 10^6 \text{ km} \qquad (12)$$

entnommen werden kann, wird mit der Verwendung der Exzentrizität der Erdbahn

$$e = 0{,}0167 \cdot a \qquad (13)$$

die *Länge der kürzeren Halbachse* zu

$$b = 149{,}577\ 10^6 \text{ km} \qquad (14)$$

erhalten.
Somit ergeben sich die Durchmesser der konzentrischen Kreisbewegungen zu

$$D_1 = a+b = 299{,}175\ 10^6 \text{ km} \qquad (15)$$

und

$$D_2 = a-b = 0{,}021\ 10^6 \text{ km} \qquad (16)$$

Demnach beträgt das Verhältnis

$$D_1/D_2 = 299{,}175/0{,}021 = 14246{,}42 \qquad (17)$$

bzw. ist

$$D_2/D_1 = 7{,}019 \cdot 10^{-5}. \qquad (18)$$

So können nunmehr auch die Extremwerte der Orbitalgeschwindigkeiten W_{res} und die zugehörigen Orbitalbeschleunigungen a_{res} analog zu dem in Abb.2 dargestellten Beispiel ermittelt werden.

$$D_2 = 7{,}019\cdot10^{-5}\cdot D_1 \qquad W_2 = 7{,}019\cdot10^{-5}\cdot W_1 \qquad a_2 = 7{,}019\cdot10^{-5}\cdot a_1 \quad (19)$$

$$D_1 = 299{,}175\ 10^6\ \text{km} \quad (20)$$

und

$$D_2 = 7{,}019\cdot10^{-5}\cdot D_1 = 0{,}021\cdot10^6 = 21000\ \text{km}. \quad (21)$$

Für die Periode der ungestörten Erdbahn, berechnet nach dem 3. Keplerschen Gesetz, wird hier (nach Wikipedia) von

$$T \approx 3{,}156\cdot10^7\ \text{s} \approx 365{,}2\ \text{Tagen} \quad (22)$$

ausgegangen.

Damit ergeben sich die Kreisumfangsgeschwindigkeiten zu

$$W_1 = \frac{\pi D_1}{T} = \pi\cdot299{,}175\cdot10^6/31{,}56\cdot10^6 = 29{,}780925\ \text{km/s} \quad (23)$$

und

$$W_2 = 7{,}019\cdot10^{-5}\cdot W_1 = 7{,}019\cdot10^{-5}\cdot29{,}780925 = 0{,}002090\ \text{km/s} = 2{,}09\text{m/s} \quad (24)$$

Demnach betragen die maximalen Orbitalgeschwindigkeiten parallel zu der langen Ellipsen-Hauptachse mit den vertikalen Abständen ±b vom Ellipsen-Mittelpunkt

$$W_{res} = W_1+W_2= (1+ 7{,}019\cdot10^{-5})\cdot W_1 = 29{,}781134\ \text{km/s} \quad (25)$$

und an den Enden der langen Achsen minimal (als Perihel- bzw. Aphel-Geschwindigkeiten)

$$W_{res} = W_1-W_2 = (1- 7{,}019\cdot10^{-5})\cdot W_1 = 29{,}778835\cdot\text{km/s}. \quad (26)$$

Ihr arithmetischer Mittelwert = 29,7810295 km/s weicht demnach von dem mit 29,7859 km/s (bei Wikipedia) angegebenen Wert ab der 3.Nachkomastelle ab, was (teilweise auch) auf Rundungsfehler zurückzuführen sein dürfte.

Die Orbitalbeschleunigungen sind:

$$a_1 = \frac{W_1^2}{(D_1/2)} = \frac{886{,}903494}{(149.587.500)} = 5{,}928994067\cdot\ 10^{-6}\ \text{km/s}^2 \quad (27)$$

$$a_2 = 7{,}019\cdot10^{-5}\cdot a_1 = 4{,}1615609\cdot\ 10^{-10}\ \text{km/s}^2. \quad (28)$$

Im Moment kann der Autor nicht einordnen, inwieweit letztere Ergbnisse für elliptische Bewegungen von Objekten im Weltraum oder von elliptischen Bewegungen von Elektronen um den Atomkern nützlich sein können.

4. Quellenangaben

[1] F. Büsching, „Schwingungs-Interferenzen im abgegrenzten Orbitalfeld von Meereswellen in Theorie und physikalischem Modell," Technische Univ. Braunschweig, Digitale Bibliothek, pp. 1-47, 2019
https://doi.org/10.24355/dbbs.084-202002031424-0
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:gbv:084-2020020411336

[2] F. Büsching, „Exponentiell reduzierte Reflexion (ERR) versus Lineare Wellentheorie". Englische Version eingereicht bei JCHS (Journal of Coastal and Hydraulic Structures), TU Delft, 2021.

[3] A. Führböter und Büsching, F, „Zur Bemessung einer Forschungsplattform in der Nordsee gegen Wellenkräfte," *unveröffentlicht*, pp. 1-58, Technische Universität Braunschweig, 1973.